מס' נבחן:_______________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' סמסטר אביב	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית ד"ר נתן רובין, יעל שטיין
26.7.2017 9:00	טל באומל, גלי בר-און, רחל סבן, מני סדיגורסקי, זיו עמרם, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **<u>עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק</u>**. משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה</u>.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

אי-שוויון מרקוב: $\Pr(f \geq \lambda E[f]) \leq \frac{1}{\lambda}$

אי-שוויון צ'בישב: $\Pr(|f - E[f]| \geq C) \leq \frac{Var[f]}{C^2}$

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8
ציון								

<u>סה"כ</u>	

חלק א – ענו על 3 מבין השאלות 1-4

שאלה 1
תהי $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. לכל $1\le i\le 6$ נגדיר את S_i להיות אוסף תתי הקבוצות של S המכילות בדיוק i איברים. נגדיר את הגרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=S_3\cup S_4\cup S_5$ ויש צלע בין שני קודקודים A,B אם"ם $A\cap B=3$. הוכיחו או הפריכו: יש ב-G מעגל אוילר.

נחשב את הדרגה של כל אחד מסוגי הקדקודים.
יהי $v\in S_3$. ל- v אין שכנים ב- S_3. ל- v יש 3 שכנים ב- S_4, כמספר האפשרויות להוסיף איבר ל- v. ל- v יש 3 שכנים ב- S_5, כמספר האפשרויות להוסיף 2 איברים ל- v. מסקנה: $\deg(v)=6$.
יהי $v\in S_4$. ל- v יש $\binom{4}{3}$ שכנים ב- S_3. ל- v יש $\binom{4}{3}$ שכנים ב- S_5, כי לכל שלושה איברים ב- v יש רק דרך אחת לקבל מהם קדקוד ב- S_5 שמכיל בדיוק שלושה מאיברי v. ל- v יש $2\binom{4}{3}$ שכנים ב- S_4, כי לכל שלושה איברים ב- v יש שתי דרכים לקבל מהם קדקוד ב- S_4 שמכיל בדיוק שלושה מאיברי v. מסקנה: $\deg(v)=16$.
יהי $v\in S_5$. ל- v יש $\binom{5}{3}$ שכנים ב- S_3. ל- v יש $\binom{5}{3}$ שכנים ב- S_4, כי לכל שלושה איברים ב- v יש רק דרך אחת לקבל מהם קדקוד ב- S_4 כך ש- v יכיל רק שלושה מאיבריו. ל- v אין שכנים ב- S_5, כי לכל קדקוד אחר $u\in S_5$ מתקיים: $|u\cap v|=4$. מסקנה: $\deg(v)=20$.

הראנו שכל הדרגות הן זוגיות. עתה נראה שהגרף קשיר.
יהיו u ו- v שני קדקודים שונים ב- V. צריך להראות שב- G יש מסלול ביניהם. אם $|u\cap v|=3$ אז יש ביניהם צלע וסיימנו. נניח לכן ש- $|u\cap v|\neq 3$.
אם $u,v\in S_5$ או אחד מהם ב- S_5 והשני ב- S_4, אז $|u\cap v|=4$ ולכן יש קדקוד $w\in S_3$ שהוא שכן משותף של u ו- v.
אם $u,v\in S_4$, אז $|u\cap v|=2$ ויש קדקוד $w\in S_4$ שהוא שכן משותף של u ו- v.
נותר לטפל במקרה שבו לפחות אחד משני הקדקודים, נניח u, שייך ל- S_3. אם $|u\cap v|=2$, אז כל קדקוד $w\in S_4$ המכיל את u ואיבר נוסף מ- v הוא שכן משותף של u ו- v. אם $|u\cap v|=1$, אז כל קדקוד $w\in S_5$ המכיל את u ושני איברים נוספים מ- v הוא שכן משותף של u ו- v. לבסוף אם $|u\cap v|=0$, אז בלי הגבלת הכלליות $u=\{1,2,3\}$ ו- $v=\{4,5,6\}$ וניתן ללכת מ- u ל- v כך: $\{1,2,3\}-\{1,2,3,4,5\}-\{1,4,5,6\}-\{4,5,6\}$.

הראנו ש- G קשיר וכל הדרגות בו זוגיות ולכן עפ"י משפט שנלמד יש ב- G מעגל אוילר.

מס' נבחן:________________

שאלה 2

ליעל יש חממה. בחממה יש 2 שורות עם מקום ל n שתילים בכל שורה. יעל רוצה לשתול גמבה עגבניה וחציל בחממה. (ברשותה מספר לא מוגבל של שתילים מכל סוג.)

א. (7 נק') מה מספר האפשרויות לסדר שתילים בחממה?

סידור 2n שתילים עם חזרות וחשיבות לסדר, כאשר לכל שתיל יש 3 אפשרויות = 3^{2n}

ב. (10 נק') מצאו נוסחת נסיגה למספר הסידורים האפשריים, כאשר אסור לחציל ועגבניה להיות על יד או מעל השני (באלכסון מותר). אין צורך לפתור את הנוסחא.

נגדיר a_n להיות מס' הסידורים החוקיים של n עמודות באורך 2, לפי האילוצים הנ"ל.
נגדיר b_{n-1} להיות מס' הסידורים החוקיים של n עמודות, כאשר בעמודה הראשונה יש גמבה אחת (והירק השני הוא חציל או עגבניה)
נגדיר c_{n-1} להיות מס' הסידורים החוקיים של n עמודות, כאשר בעמודה הראשונה אין גמבות בכלל (כלומר, שני חצילים או שתי עגבניות)
סה"כ נקבל עבור a_n:
אם התחלנו את החממה בעמודה של שתי גמבות, אין אילוצים נוספים על שאר n-1 העמודות, ולכן יש a_{n-1} דרכים להמשיך את סידור החממה
אם התחלנו את החממה בעמודה עם גמבה אחת, אז החממה שלנו היא מסוג b_{n-1}, ויש 4 דרכים להתחיל כך את החממה (שני מיקומים לגמבה האחת * שתי אפשרויות לשתיל השני)
אם התחלנו את החממה בעמודה בלי גמבות, אז החממה מסוג c_{n-1} , ויש 2 דרכים להתחיל כך את החממה (עגבניות או חצילים)
סה"כ נקבל

$$a_n = a_{n-1} + 4b_{n-1} + 2c_{n-1}$$

נחשב את נוסחת הנסיגה של b_n:
נניח בה"כ שהתחלנו בעמודה של (גמבה, חציל)- העמודה הבאה יכולה להיות (גמבה, חציל), (חציל, גמבה), (עגבניה, גמבה),(חציל, חציל) או (גמבה, גמבה), כלומר,

$$b_n = a_{n-1} + 3b_{n-1} + c_{n-1}$$

מחשב מוסחת נסיגה של c_n:
נניח בה" שהתחלנו בעמודה של (חציל, חציל)- העמודה הבאה יכולה להיות (גמבה, חציל), (חציל, גמבה), (חציל, חציל) או (גמבה גמבה), כלומר,

$$c_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + c_{n-1}$$

כעת נפשט את המשוואות באופן הבא:

$$a_n - 2c_n = -a_{n-1} \to 2c_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} \to$$
$$4b_n = 4a_{n-1} + 12b_{n-1} + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 6a_{n-1} + 12b_{n-1} + 2a_{n-2},$$
$$3a_n = 3a_{n-1} + 12b_{n-1} + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} = 6a_{n-1} + 12b_{n-1} + 3a_{n-2} \to$$
$$3a_n - 4b_n = a_{n-2} \to 4b_{n-1} = 3a_{n-1} - a_{n-3} \to$$
$$a_n = a_{n-1} + 4b_{n-1} + 2c_{n-1} = 5a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

<u>שאלה 3</u>

בגלגל הרולטה יש 5 מספרים $\{1,2,3,4,5\}$. בכל סיבוב של הגלגל יוצא אחד מהם בהתפלגות אחידה.
נניח כי מסובבים את הגלגל 100 פעמים באופן בלתי תלוי, ונסמן ב-X את סכום המספרים שהתקבלו.
הוכיחו כי $Pr[X \geq 400] \leq \frac{1}{50}$.

נסמן ב- X_i את המספר שהתקבל בסיבוב ה- i, עבור $i = 1, \dots, 100$. אזי $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$.
נחשב את התוחלת והשונות של X_i.

$E(X_i) = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ו- $V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{1+4+9+16+25}{5} - 9 = 2$.

מלינאריות התוחלת נקבל ש- $E(X) = 100 * 3 = 300$.
כיוון שהמשתנים $X_1, \dots, X_{100}$ בלתי תלויים, מתקיים גם $V(X) = \sum V(X_i) = 200$.

עתה,

$$\Pr(X \geq 400) = \Pr(X - 300 \geq 100) = \Pr(X - E(X) \geq 100) \leq \Pr(|X - E(X)| \geq 100)$$

ועפ"י אי-שוויון צ'ביצ'ב:

$$\Pr(|X - E(X)| \geq 100) \leq \frac{V(X)}{100^2} = \frac{200}{100^2} = \frac{1}{50}.$$

הערה: לא מעט תלמידים טעו וכתבו $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i^2) - E^2(X)$. אך $E(X^2) = \sum_{i=100}^{500} i^2 \Pr(X = i)$.

נסמן ב- X_i את המספר שהתקבל בסיבוב ה- i, עבור $i = 1, \dots, 100$. אזי $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$.
נחשב את התוחלת והשונות של X_i.

$E(X_i) = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ו- $V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{1+4+9+16+25}{5} - 9 = 2$.

מלינאריות התוחלת נקבל ש- $E(X) = 100 * 3 = 300$.
כיוון שהמשתנים $X_1, \dots, X_{100}$ בלתי תלויים, מתקיים גם $V(X) = \sum V(X_i) = 200$.

עתה,

$$\Pr(X \geq 400) = \Pr(X - 300 \geq 100) = \Pr(X - E(X) \geq 100) \leq \Pr(|X - E(X)| \geq 100)$$

ועפ"י אי-שוויון צ'ביצ'ב:

$$\Pr(|X - E(X)| \geq 100) \leq \frac{V(X)}{100^2} = \frac{200}{100^2} = \frac{1}{50}.$$

הערה: לא מעט תלמידים טעו וכתבו $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i^2) - E^2(X)$. אך $E(X^2) = \sum_{i=100}^{500} i^2 \Pr(X = i)$.

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 4</u>

לאורן 2 קוביות: אחת רגילה עם 6 פאות, ובשנייה יש שתי פאות עם ערך 1, שתיים עם ערך 2, ושתיים עם ערך 3. הוא בוחר באקראי קובייה ומטיל אותה:

א. מה ההסתברות שהטיל 2?

ב. מה התוחלת של תוצאת ההטלה?

ג. אם יצא 3, מה ההסתברות שהטיל את הקובייה הרגילה?

עבור א' נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה. נסמן מאורעות X – "הטלנו קובייה רגילה", Y – "הטלנו קובייה מיוחדת", A_i – "קיבלנו i בהטלה". נשים לב $\Pr(A_2|X) = 1/6$ ו $\Pr(A_2|Y) = 1/3$ וכמובן $\Pr(X) = \Pr(Y) = 1/2$.

לכן $\Pr(A_2) = \Pr(A_2|X)\Pr(X) + \Pr(A_2|Y)\Pr(Y) = \mathbf{1/4}$

עבור ב'. נבחין כי באופן סימטרי לכל *i=1,2,3* מתקיים כי $\Pr(A_i) = \frac{1}{4}$ ואילו לכל *i=4,5,6* חישוב דומה ל א' דומה (הפעם תוך הצבת $\Pr(A_i|Y) = 0, \Pr(A_i|X) = 1/6$) מראה כי $\Pr(A_i) = 1/12$.

נגדיר משתנה מקרי f עבור תוצאת ההטלה, כלומר A_i הינו המאורע "$(f = i)$".
כעת נחשב את תוחלתו

$$E[f] = \sum_{i=1}^{6} i\Pr(f = i) = \sum_{i=1}^{6} i\Pr(A_i) = \frac{1+2+3}{4} + \frac{4+5+6}{12} = \mathbf{11/4}$$

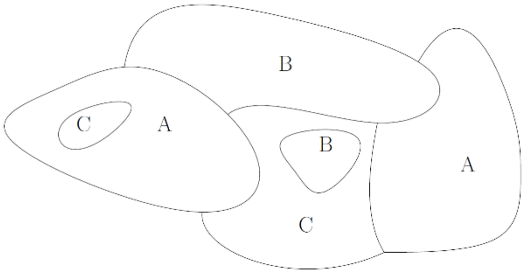
עבור ג', נשים לב כי $\Pr(X|A_3) = \frac{\Pr(X\cap A_3)}{\Pr(A_3)} = \frac{\Pr(A_3|X)\Pr(X)}{\Pr(A_3)} = \frac{\frac{1}{6}*\frac{1}{2}}{1/4} = \mathbf{1/3}$

מס' נבחן:_______________

חלק ב – ענו על 3 מבין השאלות 5-8

שאלה 5

נתונה מפה מדינית, בה כל מדינה מורכבת מבדיוק 2 אזורים נפרדים במישור. הוכיחו כי ניתן לצבוע את המפה ב-12 צבעים, כך שכל 2 מדינות עם גבול משותף יצבעו בצבעים שונים, וכן שני האזורים של כל מדינה יצבעו באותו הצבע. לדוג':



נגדיר 2 גרפים מישוריים על אותה קבוצת קודקודים, המדינות. לכל מדינה נבחר שרירותית מי האזור הראשון ומי השני. נחבר בגרף הראשון כל מדינה לכל המדינות השכנות לאזור הראשון שלה, ובגרף השני נחבר אותה לכל המדינות השכנות לאזור השני שלה. בכל גרף מישורי יש לכל היותר 3n-6 צלעות, לכן באיחוד שני הגרפים יש לכל היותר 6n-12 צלעות, בפרט קיים קודקוד מדרגה לכל היותר 11. מכאן ניתן להוכיח באינדוקציה בקלות שקיימת צביעה ב-12 צבעים, והיא חוקית כי כל מדינה חוברה באיחוד 2 הגרפים לכל שכנותיה.

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 6</u>

גרף G נקרא קשיר המילטונית, אם לכל זוג קדקודים u,v ב-G, יש בגרף מסלול המילטוני שמתחיל ב-u ומסתיים ב-v .

א. (7 נק') הוכיחו שאם G הוא גרף קשיר המילטונית עם $n \geq 3$ קדקודים אז יש ב- G מעגל המילטון.

נשים לב כי גרף קשיר המילטונית הינו קשיר ולכן מכיל זוג קודקודים שכנים u,v.
ניקח מסלול המילטון מ u ל v. כיוון שמסלול זה חייב לעבור דרך קודקוד שלישי, הוא אינו משתמש בקשת בין u ל v. בתוספת קשת זו קיבלנו מעגל המילטון כנדרש.

ב. (10 נק') הוכיחו שאם G הוא גרף קשיר המילטונית עם $n \geq 4$ קדקודים, אז לכל $v \in V$ מתקיים $\deg(v) \geq 3$.

הואיל וישנו מעגל המילטון, דרגתו של כל קודקוד היא לפחות 2. (זאת כיוון שכל פעם שהמעגל "נכנס" לקודקוד, הוא חייב לצאת ממנו בקשת אחרת מזו שהוא נכנס.)
נותר להראות כי לא קיים קודקוד שדרגתו 2 בדיוק. נניח בשלילה כי קיים קודקוד כזה *v* עם בדיוק שני שכנים *x* ו *y*. בשביל כך נראה כי בסתירה לקשירות המילטונית לא קיים מסלול המילטוני בין *x* ל *y*.
אכן, לו היה מסלול כזה, הוא היה נכנס ל *v* לאורך הקשת *xv* ויוצא לאורך הקשת *vy* (או להיפך).
כלומר מסלול *P* זה היה מכיל תת מסלול *xvy*. כיוון שמסלול המילטון לא יכול לבקר בשום קודקוד יותר מפעם אחת (ובפרט ב *x* ו *y*), וכן *x* ו *y* הם הקצוות של *P*, היינו מקבלים *P=xvy*. אבל כיוון שהמספר הכולל של הקודקודים הוא **לפחות 4**, מסלול זה אינו יכול להיות המילטוני. סתירה זו מוכיחה את הנדרש. מ.ש.ל.

<u>שאלה 7</u>

הוכיחו כי כל גרף $G = (V, E)$ מכיל תת-גרף דו-צדדי עם לפחות $\frac{|E|}{2}$ קשתות.

נוכיח באינדוקציה על מספר הקודקודים בגרף $|V|=n$.

בסיס:

- אם יש קודקוד אחד בגרף זה מתקיים באופן ריק (הגרף בעצמו הוא דו"צ)
- אם יש שני קודקודים, אז לא משנה אם יש או אין צלע ביניהם, הגרף בעצמו דו"צ.

נניח שהטענה נכונה לכל גרף על n-1 קודקודים.

צעד:

יהי $G=(V,E)$ גרף על n קודקודים ו-m צלעות.

יהי $v \in V$ שדרגתו $\deg(v)$.

נתבונן בגרף $G' = G \setminus \{v\}$ המתקבל מG ע"י הסרת הקודקוד v וכל הצלעות החלות בו.

זהו גרף על n-1 קודקודים ו- $m\text{-}\deg(v)$ צלעות,

ולכן מהנחת האינדוקציה מכיל תת גרף דו"צ עם $\frac{m-\deg(v)}{2}$ צלעות.

נוסיף כעת בחזרה את v, אך לא עם כל צלעותיו.

נסמן בV_1 את אוסף שכני v השוכנים בצד אחד של תת הגרף הדו"צ, וב V_2 את השאר.

נשים לב שכל שכן של v נמצא בדיוק באחת משתי קבוצות השכנים הנ"ל.

נניח בה"כ ש $|V_1| \geq |V_2|$.

אז $|V_1| \geq \frac{\deg(v)}{2}$.

אז נוסיף את הצלעות החלות ב- v, המחברות אותו לשכניו שב- V_1 בלבד.

אז בתת הגרף שנוצר היו $\frac{m-\deg(v)}{2}$, הוספנו עוד לפחות $\frac{\deg(v)}{2}$, סהכ קיבלנו תת גרף דו"צ המכיל לפחות $\frac{m}{2}$ צלעות.

מס' נבחן:___________________

שאלה 8

הוכיחו את המשפט:

יהי G גרף מישורי קשיר עם $n \geq 3$ קודקודים ו-m צלעות. אז $m \leq 3n - 6$.

הוכח בכיתה.

בהצלחה !