מס' נבחן:________________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א' סמסטר אביב	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, ד"ר נתן רובין, יעל שטיין
3.7.2017 9:00	טל באומל, גלי בר-און, רחל סבן, מני סדיגורסקי, זיו עמרם, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק**. משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

אי-שוויון מרקוב: $\Pr(f \geq \lambda E[f]) \leq \frac{1}{\lambda}$

אי-שוויון צ'בישב: $\Pr(|f - E[f]| \geq C) \leq \frac{Var[f]}{C^2}$

בהצלחה !

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8
ציון								

סה"כ	

חלק א – ענו על 3 מבין השאלות 1-4

שאלה 1

יהי $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ מסלול פשוט עם n קדקודים.

א. (7 נק') בכמה דרכים ניתן לצבוע את קדקודי המסלול ב- 5 צבעים (אדום, כחול, ירוק, צהוב ושחור), כך שלא תתקבל צלע מונוכרומטית (כלומר צלע ששני קדקודיה נצבעו באותו הצבע)?

יש 5 אפשרויות לצביעת v_1. לכל v_i כך ש $2 \le i \le n$, ניתן לצבוע את v_i באחד מארבעת הצבעים ש-v_{i-1} לא צבוע בהם, כלומר 4 אפשרויות. כמו כן המסלול פשוט ולכן אין חזרה על קודקודים. מכאן שיש $5 * 4^{n-1}$ דרכים לצבוע את המסלול.

טעויות נפוצות:

1. שימוש בהכלה והדחה ע"י הגדרת קבוצת צביעות A_i לכל זוג i של קודקודים סמוכים שצבועים באותו צבע. לא ניתן לפתור ככה (בצורה סבירה), כי חיתוכים של קבוצות שונות שונים בגודלם. למשל: $|A_i \cap A_{i+1}| \neq |A_i \cap A_{i+2}|$. לא ניתן ניקוד במקרה זה.
2. שימוש בנוסחת נסיגה ללא פתרון (תנאי שפה זה לא פתרון כללי). הבקשה היתה לספק פתרון ולא נוסחת נסיגה. ניתן ניקוד חלקי. (על נוסחת נסיגה נכונה ופתרון נכון מלא, כלומר, לא רק תנאי שפה, ניתן ניקוד מלא.)
3. תשובה סופית ללא הסבר. ניתן ניקוד חלקי.

ב. (10 נק') יהי a_n מספר הדרכים לצבוע את קדקודי P כך שלא תתקבל צלע מונוכרומטית וגם לא תתקבל צלע שאחד מקדקודיה אדום והשני כחול. יהי c_n מספר הדרכים לצבוע את קדקודי P עפ"י שתי הדרישות הללו וכך שצבעו של הקדקוד האחרון אינו אדום ואינו כחול.
בטאו את a_n באמצעות c_n ומצאו נוסחת נסיגה עבור c_n (אין צורך לפתור אותה).

להלן 2 פתרונות נכונים עבור a_n. (4 נקודות)

1. נתבונן בצביעה t שמקיימית את תנאי a_n (באורך n). נחלק למקרים:
   א. הקודקוד האחרון ב-t לא צבוע באדום ולא בכחול. במקרה זה t מקיימת את תנאי c_n ולכן יש c_n אפשרויות במקרה זה.
   ב. הקודקוד האחרון ב-t צבוע באדום או בכחול. במקרה זה הקודקוד שלפניו צבוע באחד מהצבעים: ירוק, שחור או צהוב. כלומר: הרישא בגדול $n-1$ של t היא אחת מc_{n-1} האפשרויות לקבלת צביעה באורך $n-1$ שמקיימת את תנאי a_{n-1} וגם לא מסתיימת בצבע אדום או כחול. במקרה זה יש 2 אפשרויות להשלים צביעה זו ל-t (צביעת הקודקוד האחרון בכחול או באדום), ולכן כאן עוד $2c_{n-1}$ אפשרויות.
   בסה"כ: $a_n = c_n + 2c_{n-1}$
2. נתבונן בצביעה t שמקיימית את תנאי a_{n-1} (באורך $n-1$). נחלק למקרים:
   א. אם צביעה זו מקיימת את תנאי c_{n-1} (כלומר מסתיימת באחד מהצבעים צהוב ירוק או שחור) אז ניתן להשלים אותה ב4 דרכים לצביעה שמקיימת את תנאי a_n (צביעת הקודקוד האחרון באדום, כחול או שניים מהצבעים בהם לא הסתיימה הצביעה t. לכן מקרה זה תורם $4c_{n-1}$ אפשרויות.
   ב. t אינה מקיימת את תנאי c_{n-1}, כלומר מסתיימת באדום או כחול. מכאן שהרישא בגדול $n-2$ שלה מקיימת את תנאי c_{n-2}. ע"מ להשלים את הצביעה לצביעה שמקיימת את תנאי a_n עלינו לצבוע את הקודקוד במקום ה$n-1$ בכחול או באדום (הצבעים האחרים זה מקרה א' ולא ב'), ואז ניאלץ לצבוע את הקודקוד האחרון באחד מהצבעים ירוק שחור או צהוב. סה"כ מקרה זה תורם $= 2 \cdot 3 \cdot c_{n-2}$ $6c_{n-2}$.
   בסה"כ קיבלנו $a_n = 4c_{n-1} + 6c_{n-2}$.

כעת נמצא נוסחת נסיגה ל-c_n. (6 נקודות) תהי t צביעה שמקיימת את תנאי c_n. נחלק למקרים:

א. הקודקוד הלפני אחרון לא צבוע באדום או בכחול. מכאן שהרישא בגודל $n-1$ של t מקיימת את תנאי c_{n-1}. ניתן להשלים צביעה זו ל-t ע"י צביעת הקודקוד האחרון בשני צבעים מבין ירוק, צהוב או שחור, בהתאם לצבעו של הקודקוד הלפני אחרון (אסור לחזור על אותו צבע). מקרה זה תורם $2c_{n-1}$.
ב. הקודקוד הלפני אחרון צבוע באדום או כחול, מכאן שהרישא בגודל $n-2$ של t חייבת לקיים את תנאי c_{n-2}. כאמור יש 2 אפשרויות לקודקוד הלפני אחרון, ועוד 3 אפשרויות לקודקוד האחרון (צהוב, ירוק או שחור). מכאן שמקרה זה תורם $2 \cdot 3 \cdot c_{n-2} = 6c_{n-2}$.
בסה"כ $c_n = 2c_{n-1} + 6c_{n-2}$.

טעויות נפוצות: (שימו לב לסעיף 7!)

1. a_n שתלוי ב-a_{n-1} ו\או ב a_{n-2}. גם לא ניתן לפתור ככה וגם זו לא היתה ההוראה. ללא ניקוד.
2. פתרון לa_n שלא מתייחס לשני המקרים האפשריים (באחד מהפתרונות), אלא רק לאחד. ללא ניקוד.
3. שגיאה בספירת האפשרויות להשלמת הצביעה מצביעה כלשהי שמקיימת c_{n-1} לצביעה כלשהי שמקיימת a_n (כלומר, גישת פתרון של פתרון 2 למעלה). רבים הכפילו ב-2 או 3, כאשר למעשה יש 4 אפשרויות. אם ההסבר היה נכון והיה חשד סביר שמדובר בtypo בלבד - ניתן ניקוד חלקי, אחרת לא ניתן ניקוד.
4. הגדרת תנאים של סדרת מספרי אפשרויות לצביעה b_n, שמקיימת את תנאי a_n ומסתיימת בקודקוד כחול או אדום (שימו לב שלא כל מי שהגדיר b_n, הגדיר זאת כך), ואז ספירה לא נכונה שלה. במקרה זה $b_n = 2c_{n-1}$, תשובה אחרת לא התקבלה. כמו כן, ע"מ להשלים צביעה שמקיימת b_{n-1} לצביעה שמקיימת a_n יש 3 אפשרויות (ולא 2), ע"י צביעת האחרון בשחור, ירוק או צהוב.
5. הגדרת מספר סדרות עזר, אחת לכל צבע של הקודקוד האחרון, ואז טענה שכולן שוות. זה לא נכון. ירוק\שחור\צהוב שוות, ואדום\כחול שוות. אך הן אינן שוות זו לזו.
6. רבים טענו $c_n = 3a_{n-1}$. זו טעות כי מספר האפשרויות להשלמת צביעה שמקיימת את a_{n-1} תלויה בצבע הקודקוד האחרון שלה. אם הוא כחול או אדום זה מקרה אחד, ואחרת זה מקרה שונה. ראו פתרון 2 למעלה. שימו לב שטענה שקולה ושגויה היא ש $c_n = 3c_{n-1} + 6c_{n-2}$.
7. **באורח פלא (מדובר במתמטיקה ולכן בוודאי יש לכך הסבר הגיוני, אך לפי שעה לא נמצא כזה) קרה לא מעט פעמים שטעויות נפוצות ששולבו ביחד (בעיקר עם טעות מספר 6) איכשהו הובילו לתשובה סופית נכונה או כמעט נכונה. תשובות אלו לא קיבלו ניקוד כי לא מדובר בהבנה אלא בהתאמה מיסתורית בין הקבועים בנוסחת הנסיגה ובטעויות הנפוצות. אנא בדקו טוב טוב את הדרך שלכם ולא את הפתרון לפני הגשת ערעור – נוסחת נסיגה נכונה עם דרך שגויה לא תוביל לתוספת ניקוד.**

שאלה 2

יהיו n ו- k מספרים שלמים חיוביים כך ש- $k \leq n$, תהי $A = \{1, 2, \cdots, k\}$ ותהי $B = \{1, 2, \cdots, n\}$. פונקציה עולה ממש $\omega : A \to B$ היא פונקציה המקיימת שלכל $i, j \in A$, אם $i > j$ אז $\omega(i) > \omega(j)$. תהי Ω קבוצת כל הפונקציות העולות ממש $\omega : A \to B$, עם התפלגות אחידה Pr.

א. (7 נק') מצאו את העוצמה של Ω.

לכל $\omega \in \Omega$, עוצמתה של התמונה של ω היא k. מצד שני, לכל תת-קבוצה כלשהי $C \subseteq B$ כך ש- $|C| = k$, יש פונקציה אחת ויחידה $\omega \in \Omega$ כך ש- $\mathrm{im}(\omega) = C$ מכיוון ש- ω עולה ממש. לכן $|\Omega|$ שווה למספר תתי-הקבוצות של B מעוצמה k, כלומר $|\Omega| = \binom{n}{k}$.

ב. (10 נק') נגדיר משתנה מקרי $f : \Omega \to \mathbb{N}$ כך שלכל $\omega \in \Omega$, הערך של $f(\omega)$ הוא מספר נקודות השבת של הפונקציה ω. חשבו את התוחלת $\mathrm{E}[f]$.

כל פונקציה $\omega \in \Omega$ עולה ממש, לכן קל לראות ש- $\omega(i) \geq i$ לכל $i \in A$. בנוסף, אם $\omega(i) > i$ עבור $i \in A$ מסויים, אז $\omega(j) > j$ לכל j כך ש- $i \leq j \leq k$.
נתונה $\omega \in \Omega$, מהאמור לעיל אנו יודעים שקבוצת נקודות השבת של ω היא קבוצה $\{1, 2, 3, \cdots, m\}$ עבור m מסויים כך ש- $0 \leq m \leq k$.
(אם $m = 0$ הקבוצה הזאת היא $\emptyset$.)

נתון m כך ש- $0 \leq m \leq k$, עלינו לחשב את $\Pr(f = m)$. מספר הפונקציות $\omega \in \Omega$ כך ש- $f(\omega) = m$ שווה למספר הפונקציות $\omega \in \Omega$ כך ש- $\omega(i) = i$ לכל i כך ש- $1 \leq i \leq m$, וכך ש- $m + 2 \leq \omega(j) \leq n$ לכל j כאשר $m + 1 \leq j \leq k$. מהעובדה ש- ω עולה ממש נסיק שמספר האפשרויות עבור ω שווה למספר תת-הקבוצות מעוצמה $k - m$ של הקבוצה $\{m + 2, m + 3, m + 4, \cdots, n\}$. לכן יש $\binom{n - m - 1}{k - m}$ אפשרויות עבור ω, ואז

$$\Pr(f = m) = \frac{\binom{n-m-1}{k-m}}{\binom{n}{k}}.$$

לכן התוחלת של f שווה ל-

$$\mathrm{E}[f] = \sum_{m=0}^{k} m \cdot \Pr(f = m) = \sum_{m=0}^{k} m \cdot \Pr(f = m) = \sum_{m=0}^{k} \frac{m\binom{n-m-1}{k-m}}{\binom{n}{k}}.$$

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 3</u>

בקורס בקומבינטוריקה יש 200 סטודנטים שצריכים להגיש פתרון לעבודת בית.

לכל סטודנט, ההסתברות שהגיש פתרון לעבודה 1 בניילונית היא 2/3 .

אם סטודנט הגיש את עבודה 1 עם ניילונית, אז ההסתברות שהגיש את עבודה 2 בניילונית היא ¾ (גדולה יותר ☹).

אם סטודנט הגיש את עבודה 1 בלי ניילונית, אז ההסתברות שהגיש את עבודה 2 בניילונית היא 0.3

יהי X משתנה מקרי שערכו מספר הפתרונות לעבודה 2 שהוגשו בניילונית, הוכיחו $\Pr[X < 150] \geq \frac{1}{5}$

תחילה נגדיר משתנים מקריים מציינים $X_1, X_2 \dots X_{200}$ עבור כל תלמיד שיציינו האם התלמיד הגיש את העבודה השנייה בניילונית. נשים לב שמתקיים $X = \sum_{i=1}^{200} X_i$ לכן נחשב את התוחלת של X_i:

A – המאורע שתלמיד i הגיש את העבודה הראשונה בניילונית

B – המאורע שתלמיד i הגיש את העבודה השנייה בניילונית

$$E(X_i) = 0 * P(X_i = 0) + 1 * P(X_i = 1) = P(X_i = 1) =$$

$$\overset{\text{נוסחאת ההסתברות השלמה}}{\cong} \quad P(B|A) * P(A) + P(B|\bar{A}) * P(\bar{A}) =$$

$$= \frac{2}{3} * \frac{3}{4} + \frac{1}{3} * 0.3 = 0.6$$

ע"פ הלינאריות של התוחלת מתקיים (**היה חשוב לציין את השימוש בלינאריות של התוחלת ולא לכתוב ממוצע או משהו כזה**):

$$E(X) = \sum_{i=1}^{200} E(X_i) = 200 * 0.6 = 120$$

כעת נשתמש באי שוויון מרקוב עבור $\lambda = \frac{5}{4}$ (**לא ניתן היה להשתמש באי שוויון צ'בישב בגלל שלא היה נתון שההגשות של התלמידים בת"ל לכן לא ניתן היה לחשב שונות**):

$$\mathrm{P}(x \ \geq \lambda E[X]) \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{P}\left(x \ \geq \frac{5}{4} E[X]\right) \leq \frac{4}{5} \rightarrow \mathrm{P}\left(x \ \geq \frac{5}{4} 120\right) \leq \frac{4}{5} \rightarrow \mathrm{P}(x \ \geq 150) \leq \frac{4}{5}$$

מצאנו את המשלים למה שאנחנו מחפשים, אז נכפיל במינוס 1 ונוסיף אחד לכל צד:

$$1 - \mathrm{P}(X \ \geq 150) \geq 1 - \frac{4}{5} \rightarrow P(X < 150) \geq \frac{1}{5}$$

כנדרש.

<u>שאלה 4</u>
הוכיחו שבגרף 4-רגולרי קשיר, ניתן לצבוע את הצלעות בשני צבעים, אדום וכחול, כך שכל קודקוד יהיה מוכל בבדיוק 2 צלעות מכל צבע.

על פי משפט הדרגות, מספר הצלעות בגרף הוא $2n$: $2m = \sum_{v \in V} d(v) = 4n$.
הגרף קשיר, וכל הדרגות בו זוגיות (4), לכן בהכרח קיים בו מעגל אוילר. המעגל עובר על כל הצלעות (בדיוק פעם אחת), ולכן אורכו זוגי. מעגל באורך זוגי ניתן לצבוע ב2 צבעים על ידי צביעה לסרוגין. נשים לב שכל 2 צלעות עוקבות יהיו צבועות בצבעים שונים.
עבור קודקוד כלשהו v, נשים לב כי v מופיע פעמיים במעגל, כל פעם שנכנסים אליו יוצאים עם צלע בצבע שונה (כי הצביעה לסרוגין) ולכן חלות עליו בדיוק 2 צלעות מכל צבע.

<u>פתרון אלטרנטיבי:</u>
על פי משפט הדרגות, מספר הצלעות בגרף הוא $2n$: $2m = \sum_{v \in V} d(v) = 4n$.
הגרף קשיר, וכל הדרגות בו זוגיות (4), לכן בהכרח קיים בו מעגל אוילר:
$v_0 v_1 v_2 \dots v_{2n-1} v_{2n} = v_0$ (נשים לב שכל קוד' מופיע פעמיים חוץ מהקוד' הראשון שמופיע שלוש פעמים). תהי e_i הצלע בין הקודקודים v_i ו v_{i+1} .
נצבע את e_0 בכחול, את e_1 באדום וכך נמשיך לצבוע לסרוגין, כאשר הצלע e_i נצבעת בכחול אם"ם i זוגי.
נראה שכל קודקוד מוכל בבדיוק 2 צלעות מכל צלע. עבור קודקוד $v_i \neq v_0$ שאינו הראשון (והאחרון) במעגל. במהלך ההילוך במעגל ביקרנו בו פעמים. כל פעם נכנסו ויצאנו בצלעות בצבע שונה ולכן חלות עליו בדיוק 2 צלעות מכל צלע.
עבור הקודקוד הראשון v_0, התחלנו בצלע כחולה, כשביקרנו בו באמצע המעגל חלו עליו 2 צלעות בצבעים שונים, וסיימנו עם צלע אדומה (e_{2n-1}, מכיוון שמס' הצלעות במעגל זוגי), ולכן הטענה תופסת גם עליו.

<u>טעויות נפוצות:</u>
- בפתרון האלטרנטיבי: התעלמות מכך שהקודקוד הראשון דורש טיעון מיוחד (עקרונית יתכן שהצלע הראשונה והאחרונה צבועות באותו הצבע).
- טענה כי ניתן לפרק את הגרף ל2 תתי גרפים 2-רגולריים. זה אמנם נכון, אך בעצם זה בדיוק מה שמוכיחים בשאלה. לא ניתן להניח זאת.
- טענו שבגרף קיים מעגל המילטון: זה פשוט לא נכון.
- צביעות לא קוהרנטיות: צבעו את הגרף כך שיש צלעות הצבועות גם בכחול וגם באדום.
- טענו שהגרף דו צדדי: זה לא נכון, שימו לב שהגרף K_5 עונה על תנאי השאלה.
- הוכחה באינדוקציה על מס' הקודקודים. כאן היו 2 סוגי טעויות:
  - לקחו גרף 4 רגולרי עם n קודקודים, ועשו עליו שינויים בשביל לקבל גרף רגולרי עם $n+1$ קודקודים. ככה לא עושים אינדוקציה, זה מגביל את הכלליות.
  - לקחו גרף 4 רגולרי עם $n+1$ קודקודים. הורידו קודקוד והוסיפו 2 צלעות בין השכנים שלו. ואז השתמשו בהנחת האינדוקציה בשביל לקבל צביעה חוקית (עד כאן בסדר). משום מה הניחו ש2 הצלעות החדשות צבועות בצבעים שונים: אין סיבה להניח שזה יתקיים.

חלק ב – ענו על 3 מבין השאלות 5-8

שאלה 5

הוכיחו כי בגרף עם n קודקודים שלא מכיל K_4 כתת גרף, יש לכל היותר $\frac{n^2}{3}$ צלעות.

נוכיח באינדוקציה על n. הבסיס: עבור n=1,2,3 יש לכל היותר $\frac{n^2}{3}$ צלעות בכל גרף עם n קודקודים.

נניח ל n-3 ונוכיח ל n. יהי G=(V,E) גרף ללא K_4 כתת-גרף עם n קודקודים. לפי משפט מנטל שראינו בכיתה, אם ב-G אין משולש יש בו לכל היותר $\frac{n^2}{4}$ צלעות ולכן גם לכל היותר $\frac{n^2}{3}$ צלעות. נניח אם כן שיש בו משולש x,y,z. נסיר קודקודים אלו ונקבל G′, שכמובן עדיין לא מכיל K_4 כתת-גרף. מהנחת האינדוקציה יש בו לכל היותר $\frac{(n-3)^2}{3}$ צלעות.

כל אחד מבין n-3 הקודקודים ב V\{x,y,z} יכול להיות מחובר בצלע לכל היותר ל-2 מבין הקודקודים x,y,z, אחרת יווצר K_4, ויש עוד את 3 הצלעות של המשולש x,y,z, לכן מספר הצלעות שהשמטנו בהסרת x,y,z הוא לכל היותר 2(n-3)+3. לסיכום:

$$|E| \leq \frac{(n-3)^2}{3} + 2(n-3) + 3 = \frac{n^2}{3}$$

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 6</u>

הוכיחו שבכל גרף פשוט על 100 קודקודים שדרגת כל קודקוד בו היא לפחות 10, יש מעגל שאורכו לכל היותר 4.

נסתכל על קודקוד כלשהו v ועל 10 מהשכנים שלו, $u_1, .., u_{10}$. אם שניים מהשכנים u_i, u_j של v הם שכנים אחד של השני, אזי נקבל כי (v, u_i, u_j, v) הוא מעגל באורך 3.
אחרת, לכל אחד מ- $u_1, .., u_{10}$ יש עוד לפחות 9 שכנים שאינם מ- $v, u_1, .., u_{10}$, ובסה"כ יש להם לפחות 90 שכנים שאינם מ- $v, u_1, .., u_{10}$. מעקרון שובך היונים נקבל שקיים קודקוד u מבין 89 הקודקודים שאינם $v, u_1, .., u_{10}$ שהוא שכן של u_i, u_j כלשהם, ויחד עם v נקבל מעגל באורך 4, והוא (v, u_i, u, u_j, v).

שאלה 7
יהי $G = (V_1, V_2, E)$ גרף דו צדדי, ונניח כי $|V_1| = |V_2|$.
הוכיחו כי אם הגרף הוא d-רגולרי אז קיימים בגרף d זיווגים מושלמים זרים בזוגות.

טענה שהוכחנו בכיתה –בגרף דו-צדדי רגולרי עם צדדים שווים בגודלם מתקיימים תנאי משפט Hall ומכאן שיש בו זיווג מושלם.
נוכיח את הטענה שבשאלה באינדוקציה על d:
בסיס: d=0
בגרף ללא קשתות אכן יש 0 זיווגים מושלמים. כנדרש.
הנחת האינדוקציה:
לכל $G = (V_1, V_2, E)$ גרף דו צדדי, d רגולרי המקיים $|V_1| = |V_2|$. אזי קיימים בגרף d זיווגים מושלמים זרים בזוגות.
צעד האינדוקציה:
יהי $G = (V_1, V_2, E)$ גרף דו צדדי, d+1 רגולרי המקיים $|V_1| = |V_2|$.
מהטענה נובע כי קיים ב G זיווג מושלם, נסמנו ב M.
נתבונן בגרף ללא צלעות הזיווג $G' = (V_1, V_2, E \setminus M)$
מאחר וכל קודקוד מופיע בדיוק בקשת אחת בזיווג מושלם הרי שבגרף G' לכל קודקוד יש צלע אחת פחות שחלה בו. מכאן שדרגת כל קודקוד ב G' הינה d
כלומר G' הינו גרף דו-צדדי שבו $|V_1|=|V_2|$ ובנוסף הוא d רגולרי ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה קיימים בו d זיווגים מושלמים זרים בזוגות נסמנם - $M_1, \dots, M_d$
נשים לב כי באף אחד מהם אין צלע משותפת עם M מאחר וכל צלעות M לא נמצאות בגרף G'.
כל זיווג מושלם בגרף G' הינו גם זיווג מושלם ב G ומכאן שבגרף G יש d+1 זיווגים מושלמים זרים בזוגות $M_1, \dots, M_d, M$ כנדרש.

טעויות נפוצות:

- הוכחה בעזרת אלגוריתם – תיאור אלגוריתם רקורסיבי שמוצא זיווגים מושלמים (כל פעם מסיר את מה שמצא) – לא הוכחה פורמלית. הרי גם את נכונותו של אלגוריתם שכזה יש להוכיח.
- הנחה שהגרף מכיל 2d קודקודים
- הוכחת טענת העזר באמירה שגודל קבוצת השכנים של תת-קבוצה שווה לסכום הדרגות של תת-הקבוצה
- הוכחה באינדוקציה על מספר הקודקודים – לרוב הבעיה בהוכחה כזאת היית שהסרת הקודקודים לא שימרה את מבנה הגרף ולכן אי אפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה
- תיאור מפורש של זיווג מושלם כך שמתחילים מקודקוד מסויים ובונים זיווג מושלם וטענה שהתיאור נכון לכל בחירת שכן. הבניות שתוארו היו לא נכונות (וההסבר להם לא מנומק היטב) וביעקר לא סיפקו הוכחה תקינה לכך שהן לא "יתקעו" באף שלב

הערה: שלב הצעד באינדוקציה הוא החלק הקריטי ובעל המשקל הגדול ביותר בתשובה

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 8</u>

הוכיחו את הכיוון "המעניין" של משפט Hall:

יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי בו $|V_1|=|V_2|$. אם לכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $\left|\Gamma(S)\right|\geq|S|$, אזי יש ב-G שידוך מושלם.

הוכח בכיתה.

טעויות נפוצות:

(1) הנחת אינדוקציה $|V_1|=|V_2|=n-1$ כדי להוכיח עבור $|V_1|=|V_2|=n$. במקרה השני בהוכחה משתמשים באינדוקציה <u>שלמה</u>, לא אינדוקציה רגילה.

(2) המקרה הראשון הוא שלכל $S\subseteq \mathrm{V}_1$ מתקיים $|\Gamma(S)|>|S|$. התנאי הנכון הוא שלכל $S\subseteq \mathrm{V}_1$ כך ש- $S\neq V_1$ ו- $S\neq\emptyset$ מתקיים $|\Gamma(S)|>|S|$. (הבנתי שמי שכתב $S\subset V_1$ התכוון להכלה ממש.)

(3) בחירת קבוצה כלשהי $S\subseteq \mathrm{V}_1$ ולאחר מכן חלוקה לשני מקרים $|\Gamma(S)|>|S|$ ו- $|S|=|\Gamma(S)|$. זאת טעות חמורה—כל ההוכחה מבוססת על חלוקה נכון למקרים, כאשר המקרה הראשון הוא ש**<u>לכל</u>** קבוצה $S\subseteq \mathrm{V}_1$ כך ש- $S\neq V_1$ ו- $S\neq\emptyset$ מתקיים $|\Gamma(S)|>|S|$, והמקרה השני הוא ש**<u>קיימת</u>** קבוצה $S\subseteq \mathrm{V}_1$ כך ש- $S\neq V_1$ ו- $S\neq\emptyset$ וכך ש- $|\Gamma(S)|=|S|$.

(4) כמו כן, היו סטודנטים שרשמו את המקרים בלי הכמתים "לכל" ו- "קיים" בכלל. גם זאת טעות מאד רצינית.

(5) הגדרת גרפים בלי להגיד מהן הצלעות בגרף. לא מספיק לרשום רק את הקדקודים, או להגיד רק שכמה קדקודים הורדו, בלי להסביר מהן הצלעות בגרף המתקבל. אפשר להגיד שהוא תת-הגרף <u>המושרה</u> ע"י הקדקודים ששייכים לו, או לתאר בדיוק מהן הצלעות שהורדו. לא הורדתי נקודות ממי שרשם $G'=G\setminus\{x,y\}$ ללא הסבר משום שקבענו בכיתה שזה מסמן את הגרף המתקבל מ- G על-ידי סילוק שני הקדקודים x ו- y וכל הצלעות החלות בהם, אבל כן הורדתי ממי שהוסיף שזה הגרף G ללא הצלע בין x ל- y. (את הגרף הזה מסמנים ב- $G\setminus\{\{x,y\}\}$.)

כדי למנוע ערעורים מיותרים, אציין כאן שאדחה ערעורים במבוססים על טענות שהורדו יותר מדי נקודות על שגיאות מסויימות, או שלמדתם מהוכחות שבהן לא כתוב (למשל) שההוכחה באינדוקציה שלמה, ש- $S\neq\emptyset$ וכולי. זה כולל את הטענה שבספר של ליניאל ופרנס כתוב שההוכחה באינדוקציה רגילה, ומספר שורות לאחר מכן הם משתמשים באינדוקציה שלמה במקום. עליכם לא רק ללמוד הוכחות בעל פה אלה גם להבין אותן, ולהתגבר על שגיאות דפוס כמו בספר.

בהצלחה !