אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

בוחן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, ד"ר נתן רובין, גב' יעל שטיין
8.4.2016	טל באומל, לילך חייטמן-ירושלמי, נתי פטר, ד״ר סטוארט סמית, ארנולד פילצר, עמית רוקח
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שעתיים וחצי

<u>הנחיות חשובות:</u>

- **ענו על 8 מתוך 10 השאלות הבאות.**
- **משקל כל שאלה הוא 13 נקודות, כך שניתן לצבור לכל היותר 104 נקודות.**
- **בכל שאלה בדיוק אחת מבין ארבעת האפשרויות היא נכונה.**
- **רשמו את תשובותיכם בטבלה למטה <u>בכתב ברור</u> ובעט.**
- **במידה ותענו על יותר מ- 8 שאלות, רק 8 השאלות הראשונות עליהן עניתם תיבדקנה.**
- **בדיקת הבוחן לא תתחשב בחישובים ו/או הסברים על גבי טופס המבחן ובמחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

שאלה	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
תשובה										

<u>ציון</u>	

1. המתרגל החליט להמתיק לסטודנטים את התרגול מבלי להרוס להם את השיניים. בכמה אופנים הוא יכול לחלק 35 סוכריות זהות ל- 25 הסטודנטים כך שכל סטודנט ייהנה מלפחות סוכריה אחת אך לא יקבל יותר מ- 5 סוכריות?

א. $\binom{34}{24} - 25\binom{28}{24}$

ב. $\binom{34}{24} - 25\binom{29}{24}$

ג. $\binom{34}{24} - 25\binom{29}{24} + \binom{25}{2}$

ד. $\binom{59}{24} - 25\binom{53}{24} + \binom{25}{2}\binom{47}{24} - \binom{25}{3}\binom{41}{24}$

הסבר: ראשית נחלק סוכריה אחת לכל אחד מהסטודנטים. עתה עלינו למנות בכמה דרכים ניתן לחלק 10 סוכריות זהות ל- 25 הסטודנטים, כך שאף סטודנט לא יקבל יותר מ- 4 סוכריות. מספר הדרכים ללא האילוץ הוא $\binom{34}{24}$. נחסיר ממספר זה את מספר הדרכים בהן האילוץ מופר: תהי A_i קבוצת כל החלוקות בהן הסטודנט ה-i-י מקבל לפחות 5 סוכריות, אזי $\left|\bigcup_{i=1}^{25} A_i\right| = 25\binom{29}{24} - \binom{25}{2}$ ולכן התשובה לשאלה היא ג'.

2. בכמה דרכים ניתן למקם בשורה 5 כלבים, 5 ילדים ו- 10 מבוגרים כך שבין כל שני ילדים יש לפחות מבוגר אחד (וייתכנו גם כלבים) ובין כל שני כלבים יש לפחות אדם אחד (מבוגר או ילד), כאשר אנו מבחינים בין מבוגרים שונים, ילדים שונים וכלבים שונים?

א. $\frac{10!16!}{6!}$

ב. $10!\binom{11}{5}\binom{16}{5}$

ג. $10!\binom{11}{5}^2 5!^2$

ד. $5!\,6\binom{11}{6}5!\,10!$

הסבר: ישנם !10 דרכים לסדר את המבוגרים בשורה. עתה עלינו לבחור 5 מקומות עבור הילדים מבין 11 המקומות האפשריים ולאחר מכן לכפול ב- !5. לבסוף, עלינו לבחור 5 מקומות עבור הכלבים מבין 16 המקומות האפשריים ולאחר מכן לכפול ב- !5. בסה"כ קבלנו $10!\binom{11}{5}5!\binom{16}{5}5! = \frac{10!16!}{6!}$.

3. בתחילת יום העבודה למוכר הפלאפל הרצל יש 2 מטבעות של 5 שקלים. מחיר מנת פלאפל הינו 5 שקלים. במהלך היום מגיעים 49 לקוחות עם מטבע של 5 שקלים ו- 51 לקוחות עם מטבע של 10 שקלים. בכמה דרכים יכולים הלקוחות להגיע כך שלהרצל תמיד יהיה עודף להחזיר ללקוחות עם ה- 10 שקלים? (בשאלה זו לא מבחינים בין לקוחות עם אותו מטבע.)

א. $\frac{1}{52}\binom{102}{51} - \frac{1}{51}\binom{100}{50}$

ב. $\frac{1}{52}\binom{102}{51}$

ג. $\frac{1}{50}\binom{98}{49}$

ד. $\frac{1}{52}\binom{102}{51}-\frac{1}{50}\binom{98}{49}$

הסבר: כמספר הסדרות המאוזנות הבנויות מ- 51 סימני '0' ו- 51 סימני '1' המתחילות ברצף 00 . אולם מספר זה שווה למספר הסדרות המאוזנות הבנויות מ- 51 סימני 0 ו- 51 סימני 1 ללא התנאי הנוסף פחות מספר הסדרות הנ"ל שמתחילות ברצף 01, כלומר א.

4. בסופרמרקט עובדים 5 קופאים, כאשר לכל אחד מהם קצב עבודה שונה. בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים (שונים) בחמשת התורים לקופות? (שימו לב כי תור לקופה יכול להישאר ריק.)

א. 5^n

ב. $\frac{(n+4)!}{4!}$

ג. $\binom{n+4}{4}$

ד. $n!\,5^n$

הסבר: ישנן !n דרכים לסדר את האנשים בתור אחד ארוך. בהינתן תור ארוך כזה, ישנן $\binom{n+4}{4}$ דרכים לחתוך אותו לחמישה תורים, כך שהחלק הראשון יהווה את התור לקופה הראשונה, החלק השני יהווה את התור לקופה השנייה וכו'. לכן בסה"כ $\frac{(n+4)!}{4!} = n!\binom{n+4}{4}$.

5. תהי A קבוצה בת n איברים ויהי $2 \le k \le n$.
בכמה דרכים ניתן ליצור סדרה $A_1, \dots, A_k$ של k תתי קבוצות של A, כך שכל איבר ב- A יופיע בלכל היותר $k-1$ תתי קבוצות?

א. k^n

ב. $\binom{n}{k-1}^n$

ג. $(2^k-1)^n$

ד. $\binom{n+k-1}{k-1}^{k-1}$

הסבר: יהי a איבר ב- A. ישנן 2^k-1 אפשרויות למקם את a בתתי הקבוצות $A_1, \dots, A_k$ (כלומר, כל תת קבוצה של $\{A_1, \dots, A_k\}$ למעט הקבוצה כולה), ולכן סה"כ מספר האפשרויות הוא ג.

6. בכמה דרכים ניתן לחלק 10 תפוזים זהים ו- 20 אשכוליות זהות ל- 50 ילדים (שונים)?

א. $50^{10}50^{20}$

ב. $\binom{50}{10}\binom{50}{20}$

ג. $\binom{59}{10}\binom{69}{20}$

ד. $\frac{50!}{40!}\frac{50!}{30!}$

הסבר: עבור חלוקת התפוזים, מדובר בבחירה של חלוקה של 10 תפוזים ל-50 ילדים – אין חשיבות לסדר הבחירה ומותרות חזרות. כפי שלמדנו, יש לכך $\binom{59}{10} = \binom{50+10-1}{10}$ אפשרויות. עבור בחירת האשכוליות, באופן דומה יש $\binom{69}{20} = \binom{50+20-1}{20}$ אפשרויות, ומעקרון הכפל נקבל את תשובה ג'.

7. מספר הסדרות מעל קבוצת המספרים $\{0,1,2,3,4,5\}$ שאורכן 20 וסכום איבריהן הוא אי-זוגי הוא:

א. 3^{20}

ב. 6^{10}

ג. 6^{19}

ד. $\frac{6^{20}}{2}$

הסבר: לכל סדרה מאורך 19 יש 3 אפשרויות להשלימה לסדרה מאורך 20 עם סכום זוגי – כיוון שאם סכום 19 האיברים הראשונים זוגי, אזי ניתן להשלים ע"י 0,2,4. אחרת, אם סכומה אי-זוגי, ניתן להשלים ע"י 1,3,5. יש 6^{19} סדרות מאורך 19, לכן תשובה ד' נכונה.

8. תהי $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. מהו הגודל המינימלי x עבורו מתקיים שכל תת קבוצה של A מגודל x מכילה שתי תתי קבוצות שונות שוות בסכומן (כלומר סכום איברי האחת שווה לסכום איברי השנייה).

א. 3

ב. 4

ג. 5

ד. 6

הסבר: ניתן לבדוק שעבור הקבוצה $\{1,2,4,8\}$, כל שתי תת-קבוצות שונות יהיו בעלות סכום שונה (מביטים על האיבר הגדול ביותר בו הן שונות). נותר להוכיח שכל קבוצה מגודל 5 מכילה שתי תתי-קבוצות שונות בעלות אותו הסכום. לקבוצה מגודל 5 יש $2^5 = 32$ תתי קבוצות, אלו יהיו היונים שלנו. מצד שני, הסכומים האפשריים עבור כל תת-קבוצה הם מספרים בין 0 ל- 4+5+6+7+8=30, כלומר יש רק 31 סכומים אפשריים, אלו יהיו השובכים. מעקרון שובך יונים, בהכרח יש 2 תתי-קבוצות שונות עם אותו הסכום.

9. $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = ?$

א. 2^{n-1}

ב. $n(n-1)2^{n-2}$

ג. $n2^{n-1}$

ד. $\binom{n}{2}2^{n-2}$

הסבר: כמה אפשרויות ישנן לבחור מתוך n אנשים, ועד מגודל לפחות 2 ומתוך הועד לבחור יו"ר וסגן-יו"ר? מצד אחד, ניתן לעבור על כל גדלי הועד האפשריים k : יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחור ועד, ואז k אפשרויות ליו"ר, וכן k-1 אפשרויות לסגן מתוך הנותרים. זה יתן את הביטוי בשאלה. מצד שני, ניתן לבחור קודם את היו"ר (n אפשרויות), אח"כ את הסגן (n-1 אפשרויות), ואז להשלים את הועד ע"י תת-קבוצה מגודל כלשהו של n-2 האנשים הנותרים, לכך יש 2^{n-2} אפשרויות, ונקבל את תשובה ב'.

10. כמה פתרונות בשלמים **חיוביים** יש לאי שוויון $\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 15$

א. $\binom{15}{5}$

ב. $\binom{24}{15}$

ג. $\binom{14}{5}$

ד. $\sum_{i=0}^{15}\binom{9+i}{i}$

הסבר: כיוון שכל משתנה $X_i \geq 1$, הפתרון הוא כמספר הפתרונות לאי-השויון $\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 5$, כאשר $\forall i, X_i \geq 0$. זה שקול למספר הפתרונות למשוואה $Y + \sum_{i=1}^{10} X_i = 5$ במשתנים אי-שליליים. כפי שלמדנו בכיתה, התשובה היא $\binom{5+11-1}{5} = \binom{15}{5}$.