מס' נבחן:_______________

# אוניברסיטת בן-גוריון
# המחלקה למדעי המחשב

| | |
|---|---|
| **מבנים בדידים וקומבינטוריקה**<br>202-1-1061<br>מועד א' סמסטר אביב | פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית,<br>ד"ר נתן רובין, יעל שטיין |
| 4.7.2016<br>9:00 | טל באומל, ד"ר לילך חייטמן-ירושלמי,<br>ד"ר סטוארט סמית, נתי פטר, ארנולד פילצר, עמית רוקח |
| חומר עזר | **אסור** |
| משך הבחינה | שלוש שעות |

**הנחיות חשובות:**

- המבחן כולל שני חלקים, ובכל חלק 4 שאלות. **עליכם לענות על 3 שאלות בלבד מכל חלק**. משקלה של כל שאלה הוא 17 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לשאלה שבחרתם להשיב עליה, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד השאלה. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק משאלה.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

**אי-שוויון מרקוב:** $\Pr(f \geq \lambda E[f]) \leq \frac{1}{\lambda}$

**אי-שוויון צ'בישב:** $\Pr(|f - E[f]| \geq C) \leq \frac{Var[f]}{C^2}$

# בהצלחה !

| שאלה | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ציון | | | | | | | | |

| | |
|---|---|
| **סה"כ** | |

## חלק א – ענה על 3 מבין השאלות 1-4

### שאלה 1

חברת הובלות ושליחויות מחזיקה מכוניות מ- 10 דגמים שונים. מכל דגם יש לה בדיוק 5 מכוניות. בסוף השבוע מכוניות החברה מפוזרות באופן שרירותי בין 10 חניונים, 5 מכוניות בכל חניון. הוכח שניתן לבחור מכונית אחת מכל חניון כך שעשר המכוניות שנבחרו כוללות את כל הדגמים שברשות החברה.

השאלה זהה לשאלה 5 מתרגול 11 (בשינוי מספרים ואובייקטים).

נתבונן בפיזור כלשהו של המכוניות בין החניונים.
נגדיר גרף דו-חלקי $G=(A\cup B,E)$ כך ש:
$A$ – קבוצת קדקודים המייצגים את 10 הדגמים
ו-$B$ – קבוצת קדקודים המייצגים את 10 החניונים.
כמו כן, $E=\{\{a,b\}|$ בחניון $b$ חונה מכונית מדגם $a\}$.
נבחין כי מתקיים $|A|=|B|=10$. כעת, נראה כי לכל $S\subseteq A$ מתקיים $|\Gamma(S)|\geq|S|$
ונסיק ממשפט $Hall$ כי בגרף יש זיווג מושלם.
תהא $S\subseteq A$, מכל דגם 5 מכוניות ולכן מספר המכוניות מדגם ב-S הוא $5|S|$.
$5|S|$ המכוניות פוזרו בין $|\Gamma(S)|$ חניונים כשבכל חניון 5 מקומות חניה, כלומר בין $5|\Gamma(S)|$ מקומות חניה לכל היותר. היות ולכל מכונית יש מקום חניה הרי שצריך להתקיים
$|\Gamma(S)|\geq|S| \Leftarrow 5|\Gamma(S)|\geq 5|S|$.
מכאן שיש זיווג מושלם בגרף המגדיר בחירה של מכונית מכל חניון כך שכל דגם נבחר בדיוק פעם אחת.

טעויות נפוצות:
- חוסר הסבר / טיעונים שגויים בהוכחת קיום תנאי $Hall$, **החלק המרכזי בהוכחה**. לדוגמא: דרגת כל קדקוד ב-A היא לפחות 1 ולכן לכל $S\subseteq A$ מתקיים $|\Gamma(S)|\geq|S|$.
- טענה כי הגרף כפי שהוגדר פה הוא 5-רגולרי. טענה זו אינה נכונה היות ודגם יכול להופיע בחניון יותר מפעם אחת.
- הגדרת הגרף כך שלכל מכונית מוגדרת צלע ואז ישנן צלעות כפולות ומתקבל מולטי-גרף. לא ניתן ליישם עליו ישירות את המשפט הנלמד בכיתה כי "בגרף דו-חלקי רגולרי קיים זיווג מושלם", כי משפט זה כפי שנלמד מתייחס לגרפים פשוטים.

מס' נבחן:___________________

## שאלה 2

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר המכיל מעגל אוילר. בנוסף, נתון כי לכל $v \in V$ הגרף $G\backslash\{v\}$ מכיל מסלול אוילר.
הוכח כי $G$ הוא מעגל פשוט.

מאחר ו $G$ קשיר ומכיל מעגל אוילר, דרגת כל קדקוד בו הינה מספר זוגי גדול או שווה ל 2.

על מנת להראות כי גרף קשיר כלשהו הינו מעגל פשוט, הכרחי ומספיק להראות שדרגתו של כל קדקוד הינה בדיוק 2.

(בפרט, עבור גרף $G$ בשאלה זה יוכיח כי מעגל אוילר מבקר בכל קדקוד פעם אחת ויחידה, ולכן הוא פשוט...)

נניח בשלילה כי קיים קדקוד $v$ כלשהו ב $G$ שדרגתו היא לפחות 4.
נתבונן בגרף $G\backslash\{v\}$: כל אחד מהשכנים של $v$ דרגתו הפכה מזוגית לאי זוגית, בעקבות אובדן הצלע ל $v$.
על כן קיימים בגרף $G\backslash\{v\}$ לפחות 4 קודקודים בעלי דרגה אי זוגית.

אבל מאחר והגרף $G\backslash\{v\}$ מכיל מסלול אוילר,
יכולים להיות בו לכל יותר 2 קדקודים בעלי דרגה אי זוגית (ע"פ משפט שמספק תנאי הכרחי ומספיק לקיום מסלול אוילר). סתירה זו מראה כי דרגתו של כל קדקוד ב $G$ היא אכן 2, כלומר גרף קשיר $G$ הינו מעגל פשוט.

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 3</u>

יהיו $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ שני גרפים מישוריים על אותה קבוצת קדקודים V.
נגדיר $G = (V, E_1 \cup E_2)$. הוכח כי ניתן לצבוע את קודקודי הגרף G (צביעה חוקית) עם 12 צבעים.

נסמן: $|V| = n$, $|E_1| = m_1$, $|E_2| = m_2$, $|E| = m$
כיוון ש- $G_1$ ו- $G_2$ מישוריים, $m_1, m_2 \leq 3n - 6$ , ולכן $m \leq m_1 + m_2 \leq 6n - 12$ .
עפ"י משפט הדרגות,
$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2m \leq 12n - 24$
וממוצע הדרגות קטן מ- 12. לכן, בהכרח קיים קדקוד $x \in V$ שדרגתו קטנה או שווה 11.

נוכיח עתה את הטענה באינדוקציה על $n$.
בסיס: אם $n \leq 12$ – ברור.
נניח שהטענה נכונה עבור $n - 1 \geq 12$ ונוכיח עבור $n$ .
עפ"י האבחנה למעלה, קיים קדקוד $x \in V$ שדרגתו קטנה או שווה 11.
נתבונן בגרף $G' = G \setminus \{x\}$ . מספר הקדקודים ב- $G'$ הוא $n - 1$ והוא מתקבל מאיחוד הגרפים המישוריים $G_1 \setminus \{x\}$ ו- $G_2 \setminus \{x\}$ . לכן, עפ"י הנחת האינדוקציה $G'$ הינו 12-צביע ותהי $f$ צביעה של $G'$ ב- 12 צבעים.
נחזיר עתה את הקדקוד $x$ ואת הצלעות שהסרנו. כיוון שמספר שכניו של $x$ ב- $G$ קטן מ- 12, הרי ששכניו צבועים בלכל היותר 11 צבעים, ונותר לפחות צבע אחד פנוי עבור $x$ . נצבע את $x$ בצבע כזה ונקבל (יחד עם $f$) צביעה של $G$ ב- 12 צבעים.

שאלה 4

מהו המספר המינימלי $n$ כך שבכל צביעה של צלעות הגרף $K_n$ באדום ובכחול, בהכרח יתקבל מעגל אי-זוגי אדום או $K_{50}$ כחול?

נוכיח כי $n = 99$.

ראשית, נראה כי $99 \leq n$. כלומר, עבור $n = 99$ מתקיים כי בכל צביעה של צלעות הגרף $K_n$ באדום ובכחול, בהכרח יתקבל מעגל אי-זוגי אדום או $K_{50}$ כחול.
נתבונן בצביעה כלשהי. אם מכילה מעגל אי-זוגי אדום סיימנו. אחרת, אין מעגלים אדומים באורך אי-זוגי ולכן הגרף האדום דו-חלקי. מעקרון שובך היונים אחד מצדי הגרף בגודל לפחות $\left\lceil \frac{99}{2} \right\rceil = 50$ ובין כל שניים מקדקודיו צלע כחולה. מכאן שיש $K_{50}$ כחול.

כעת נוכיח מינימליות, כלומר, נראה כי עבור $n \leq 98$ ישנה צביעה של $K_n$ באדום ובכחול, כך שלא מתקבל מעגל אי-זוגי אדום וגם לא $K_{50}$ כחול. נחלק את הקדקודים לשתי קבוצות, כל אחת בגודל 49 לכל היותר. נצבע את הצלעות המחברות בין הקבוצות באדום ואת שאר הצלעות (בתוך אותה קבוצה) בכחול. נבחין כי אין מעגל אי-זוגי אדום, שכן הצלעות האדומות מגדירות גרף דו-חלקי. כמו כן, אין $K_{50}$ כחול שכן כל קבוצה של 50 קדקודים שנבחר מכילה זוג קדקודים מקבוצות שונות ולכן מחוברים בצלע אדומה.

טעויות נפוצות:
$n = R(50,3)$ – . אמנם עבור מספר זה של קדקודים בכל צביעה של צלעות הגרף $K_n$ יתקבל משולש שהוא מעגל אי-זוגי אדום או $K_{50}$ כחול, אולם, זהו לא $n$ המינימלי.

## חלק ב – ענה על 3 מבין השאלות 5-8

### שאלה 5

תהי $\pi$ תמורה של $A=\{1,2,\dots,n\}$. קבוצה $B\subseteq A$ בת $k$ איברים, $1\le k\le n$, מהווה **מעגל** מאורך $k$ ב- $\pi$, אם ניתן לסדר את איברי $B$ בשורה $i_1,i_2,\dots,i_k$ כך שלכל $1\le j\le k-1$ $\pi(i_j)=i_{j+1}$ וגם $\pi(i_k)=i_1$.
למשל: בפרמוטציה $\pi(1)=4,\ \pi(2)=2, \pi(3)=1,\ \pi(4)=3$ הקבוצה $\{1,3,4\}$ מהווה מעגל מאורך 3 (נסדר בשורה: 1,4,3). חשבו את תוחלת מספר המעגלים מאורך $k$ בפרמוטציה מקרית של $A$.

נגדיר מ"מ $f$ שבהינתן פרמוטציה מחזיר לנו את מספר המעגלים מאורך k. כלומר מחפשים את $E[f]$.
נשים לב שלכל פרמוטציה יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחור קבוצה מגודל k ולכן נגדיר מ"מ $f_i$ אינדיקטורים המקבלים פרמוטציה ומחזירים האם הקבוצה ה-$i$-ית (מגודל k) הינה מעגל.
לכן: $f=\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} f_i$ ומליניאריות התוחלת נקבל כי $E[f]=\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} E[f_i]$.
מכיוון שתוחלת אינדיקטור שווה להסתברות לקבלת המאורע כלומר $E[f_i]=\Pr(set\ i\ is\ a\ cycle)$ נוכל לחשב את ההסתברות שבקבלת פרמוטציה כלשהיא הקבוצה ה-$i$-ית (מגודל k) הינה מעגל ולהציב בסכום.
ההסתברות היא $\Pr(set\ i\ is\ a\ cycle)=\frac{(k-1)!\cdot(n-k)!}{n!}$ כלומר מס' הסידורים הפנימיים למעגל כפול סידור כל שאר האיברים שאינם בקבוצה חלקי גודל מרחב המדגם שלנו שהוא כל סידור אפשרי של $n$ איברים.

$$E[f]=\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} E[f_i]=\sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \Pr(set\ i\ is\ cycle)=\binom{n}{k}\cdot\frac{(k-1)!\cdot(n-k)!}{n!}=\frac{1}{k}$$

## שאלה 6

מטילים 4 "קוביות" $C_1, C_2, C_3, C_4$, כל אחת עם 5 פאות הממוספרות 1,2,3,4,5 . יהי $f$ המשתנה המקרי שערכו הוא סכום תוצאות ארבעת ההטלות. מצא חסם תחתון גדול ככל האפשר להסתברות ש- $9 < f < 15$ .

נגדיר מ"מ $f_i$ המחזיר את ערך ההטלה ה $i$ ולכן $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ . תחילה נחשב את התוחלת והשונות של $f$:

מליניאריות התוחלת:

$$E[f] = E(f_1) + E(f_2) + E(f_3) + E(f_4) = 4 \cdot \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 12$$

מכיוון שהטלות הקוביות הינן **בלתי תלויות**:

$$V[f] = V(f_1) + V(f_2) + V(f_3) + V(f_4) = 4 \cdot \left(E\left[f_i^2\right] - E[f_i]^2\right) = 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{5} i^2 - 3^2\right) = 8$$

כל שנשאר הוא להציב בנוסחאות חסמי הזנב:

**צבישב:**

$$\Pr(9 < f < 15) = \Pr(-3 < f - 12 < 3) = \Pr(|f - E[f]| < 3) =$$
$$1 - \Pr(|f - E[f]| \geq 3) \geq 1 - \frac{V[f]}{3^2} = \frac{1}{9}$$

**מרקוב:** עם מרקוב לא ניתן לחשב את החסמים בצורה נכונה ולקבל חסמים תחתונים

ולכן החסם התחתון ההדוק ביותר הוא $\frac{1}{9}$.

מס' נבחן:________________

## שאלה 7

יהיה $G$ המולטי גרף המכוון הבא: $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+3}\}$, לכל קדקוד $v_i$ , $0 \le i \le n$ , נכנסות 3 צלעות מ- $v_{i+2}$ ו- 2 צלעות מ- $v_{i+3}$ . נסמן ב- $a_n$ את מספר המסלולים מ- $v_n$ ל- $v_0$. חשב את $a_n$ (כלומר, בטא את $a_n$ כפונקציה של $n$ ).

עבור כל קדקוד $v_i$ ישנן 3 צלעות דרכן אפשר להגיע ל$v_{i-2}$ ו- 2 צלעות דרכן אפשר להגיע ל $v_{i-3}$
לכן:

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

כמו כן:

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 3$$

נפתור את נוסחת הנסיגה.
הפולינום האופייני הוא:

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = -1, x_3 = 2$$

פתרון כללי נראה כך:

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n + C \cdot n * (-1)^n$$

נציב את תנאי העצירה:

$$\begin{cases} 1 = A \cdot 2^0 + B \cdot (-1)^0 + C \cdot 0 \cdot (-1)^0 \\ 0 = A \cdot 2^1 + B \cdot (-1)^1 + C \cdot 1 \cdot (-1)^1 \\ 3 = A \cdot 2^2 + B \cdot (-1)^2 + C \cdot 2 \cdot (-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = 2A - B - C \\ 3 = 4A + B + 2C \end{cases}$$

$$A = \frac{4}{9}, B = \frac{5}{9}, C = \frac{1}{3}$$

הפתרון הוא:

$$a_n = \frac{4}{9} \cdot 2^n + \frac{5}{9} \cdot (-1)^n + \frac{1}{3} \cdot n * (-1)^n$$

## שאלה 8

הוכח את נוסחת אוילר: יהי $G$ גרף מישורי קשיר. אז $n + f - m = 2$ , כאשר $n$ מספר הקדקודים, $m$ מספר הצלעות ו- $f$ מספר הפאות של הגרף $G$.

נוכיח את התוצאה באינדוקציה על $m$.

בסיס: $m = 0$. בגרף קשיר ומישורי $G$ בעל 0 צלעות יש רק קדקוד אחד ולכן גם פאה אחת. אז במקרה זה $n + f - m = 1 + 1 - 0 = 2$.

*כעת יהי $m$ מספר טבעי כך ש- $m > 0$ ונניח שהטענה מתקיימת עבור (כל ייצוג מישורי של) כל גרף מישורי וקשיר בעל $m - 1$ צלעות.* יהי $G$ גרף מישורי וקשיר בעל $m$ צלעות ונתבונן בייצוג מישורי מסויים של $G$.

מקרה I: אין מעגל פשוט ב- $G$. הגרף $G$ גם קשיר, לכן הוא עץ (וכל עץ הוא מישורי, כמובן). מתוצאה שהוכחנו בכיתה נובע ש- $n = m + 1$, ובנוסף $f = 1$ במקרה זה. אז $n + f - m = 2$.

מקרה II: יש מעגל פשוט ב- $G$. תהי $e$ צלע ששייכת למעגל פשוט $C$ בגרף $G$ ויהי $G' = G \setminus \{e\}$. נסמן ב- $n'$ את מספר הקדקודים, $m'$ מספר הצלעות, ו- $f'$ מספר הפאות של הגרף $G'$. מתוצאה שהוכחנו בכיתה נובע שהגרף $G'$ עדיין קשיר מכיוון ש- $e$ שייכת למעגל פשוט. כל תת-גרף של גרף מישורי הוא גם מישורי, כמובן, לכן $G'$ מישורי וקשיר ו- $m' = m - 1$. אז $G'$ מקיים את הנחת האינדוקציה, זאת אומרת ש- $n' + f' - m' = 2$.

כאן $n' = n$ ו- $m' = m - 1$. בנוסף, בכל ייצוג מישורי של $G$ הצלע $e$ גובלת בין שתי פאות שונות, אחת שנמצאת בתוך המעגל הפשוט $C$ ואחת מחוצה לו. שתי הפאות האלה מתאחדות לפאה אחת בגרף $G'$, ולכן $f' = f - 1$. אזי $2 = n' + f' - m' = n + (f - 1) - (m - 1) = n + f - m$. זאת אומרת שנוסחת אוילר מתקיימת גם ב- $G$. זה מסיים את האינדוקציה.

טעויות נפוצות:

היו שתי שגיאות נפוצות בהוכחה של נוסחת אוילר:

1. בשאלה הגדירו $m, n, f$ וכמעט כולם הוכיחו את הטענה באינדוקציה על $m$, אבל בסיס האינדוקציה צריך להיות ערך ספציפי קבוע עבור $m$, לא משתנה. זאת אומרת שיש לקבוע מראש את $n$ ולאחר מכן לעשות אינדוקציה על $m$, כאשר הבסיס הוא $m = n - 1$.

הורדתי שתי נקודות למי שלא עשה זאת. (אגב, אפשר לעשות אינדוקציה בדרך אחרת, החל מ- $m = 0$, כמו בפתרון המפורסם.)

2. הורדתי נקודה אחת ממי שהתחיל את האינדוקציה במקרה $m = n - 1$ בלי להסביר שזה המספר המינימלי של צלעות בגרף קשיר על $n$ קדקודים. במבחן יש לנמק, לא רק לרשום.

**בהצלחה !**