

## אוניברסיטת בן-גוריון המחלקה למדעי המחשב

פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, גב' יעל שטיין	בוחן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061
טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר, גיל קרן	8.5.2015 09:00
<b>אסור</b>	חומר עזר
שעתיים וחצי	משך הבחינה

### הנחיות חשובות:

- הבוחן מורכב משני חלקים.

בחלק א' **עליכם לענות על 2 שאלות בלבד** מתוך ה – 3. משקלה של כל שאלה הוא 30 נקודות. בכל שאלה ישנם שני סעיפים עליהם נדרשת תשובה מפורטת ומנומקת.

בחלק ב' **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 10 נקודות. בחלק זה אין לכתוב נימוק באף שאלה.

- במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו או לשאלה כלשהי, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף או השאלה. אין לכתוב "לא יודעים" על חלק מסעיף.

- רצוי לפתור את הבוחן תחילה במחברת הטיוטה ולאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת הבוחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

**בהצלחה !**

שאלה	א1	א2	א3	ב1	ב2	ב3	ב4	ב5
ציון								

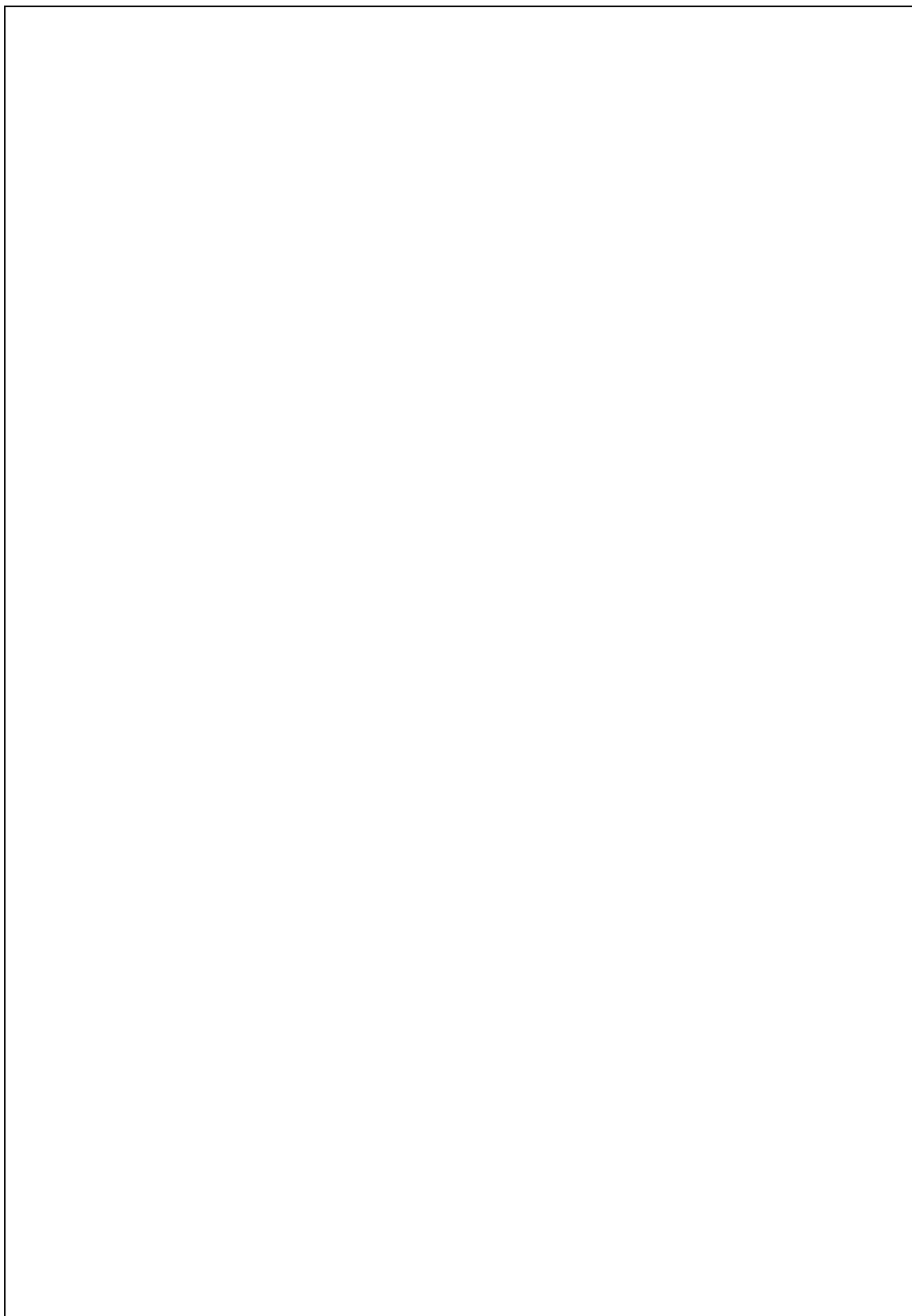
<u>סה"כ</u>	
-------------	--

**חלק א: ענו על 2 מתוך 3 השאלות הבאות. נמקו את תשובותיכם:**

**שאלה 1 (30%)**

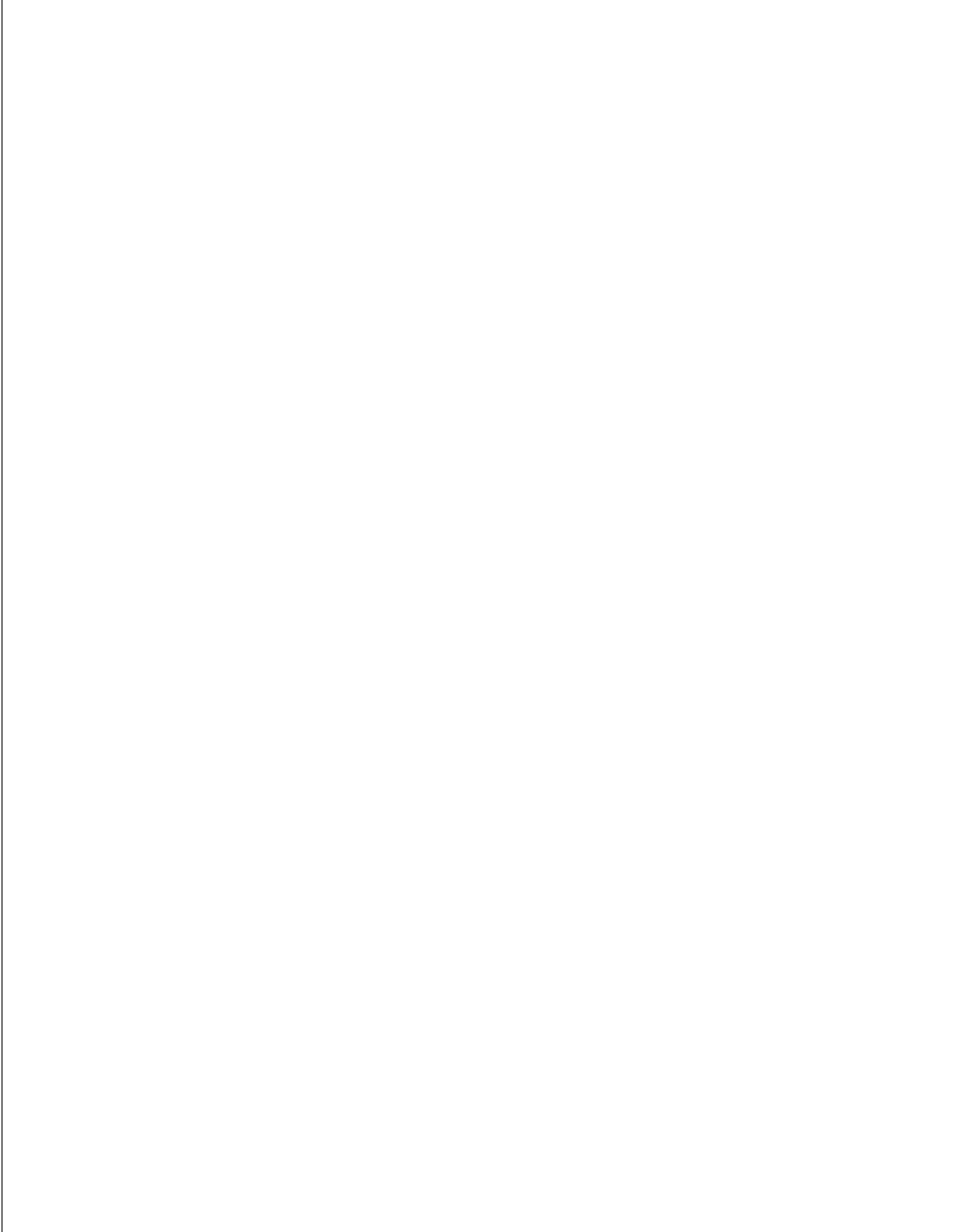
א. (15%) הוכיחו קומבינטורית את הזהות הבאה:  $\binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2$ .

ב. (15%) בהינתן מצולע בעל 12 קדקודים מובחנים, בכמה דרכים ניתן לבחור 3 מקדקודיו מבלי שייבחרו שניים סמוכים?



שאלה 2 (30%)

א. (15%) תהי קבוצה של 10 מספרים טבעיים כך ש-  
 $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{10} \leq 100$   
הוכיחו כי קיימות שתי תתי-קבוצות שונות של  $B$  שסכום האיברים שלהן שווה.



ב. (15%) בכיתה יש סטודנטים מ-4 מסלולים שונים: מדעי המחשב, מתמטיקה, הנדסת תוכנה וביואינפורמטיקה. לכל מסלול משתייכים בדיוק  $n$  סטודנטים. כמו כן, לכל מסלול מוקצה ספסל בכיתה. יש לבחור  $k$  סטודנטים ( $k \leq n$ ) מתוך כלל הסטודנטים, להוציאם מהכיתה ואת הסטודנטים שנותרו בכיתה להושיב על 4 הספסלים, כל סטודנט בספסל המוקצה למסלול הלימודים שלו (יש חשיבות לסדר הישיבה על הספסל). בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

יש להציג את התשובה כביטוי סגור. תשובה כסכום תקבל ניקוד חלקי (10%).

**רמז:** על מנת לעבור מסכום לביטוי סגור יש להיעזר במשפט המולטינום:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

שאלה 3 (30%)

א. (15%) סדרת מספרים באורך  $k$  נקראת "יונימודאלית" אם קיים ערך  $1 \leq i \leq k$  כך שהרישא של הסדרה עד המקום ה- $i$  (כולל) היא סדרה עולה והסיפא שלה החל מהמקום ה- $i$  (כולל) היא סדרה יורדת. לדוגמא: הסדרה 1,4,6,8,5,3 היא סדרה יונימודאלית עבור  $k = 6, i = 4$ . בכמה דרכים ניתן לבנות סדרה יונימודאלית באורך  $k$  המורכבת מ- $k$  מספרים שונים מבין  $\{1, \dots, n\}$ ? יש להציג את התשובה כביטוי סגור.

ב. (15%) מה מספר הפונקציות  $f: \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  שהן 'על' ובהן 1 ו-2 אינן נקודות שבת?

**חלק ב: ענו על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.**

**שאלה 1 (10%)**

למה שווה הסכום  $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (-3)^{2k+1}$  ?

1.  $2(1-3)^6$
2.  $-3,000,000$
3.  $-3 \cdot 9,000,000$
4.  $(1-3)^{12}$

**שאלה 2 (10%)**

יהא  $n \geq 0$ , נתונים שלושת הביטויים הבאים:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \sum_{0 \leq i \leq m \leq n} \binom{m}{i} \binom{n}{m} \\ \text{ב. } & \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3} \\ \text{ג. } & \sum_{m=0}^n \left[ \binom{n}{m} 2^{n-m} \right] \end{aligned}$$

אילו מבין הביטויים שווה ל- $3^n$  ?

1. ביטויים א' ו-ב' בלבד.
2. ביטויים א' ו-ג' בלבד.
3. ביטויים ב' ו-ג' בלבד.
4. ביטויים א', ב' ו-ג'.

**שאלה 3 (10%)**

בדוכן הסנדוויצ'ים בנמל התעופה מחיר סנדוויץ' בשקלים הוא 5 ש"ח ומחיר סנדוויץ' באירו הוא 1 אירו. בתור לדוכן עומדים 40 אנשים. 10 מהם מתכוונים לשלם במטבע של 10 ש"ח, 10 במטבע של 5 ש"ח, 10 במטבע של 1 אירו ו-10 במטבע של 2 אירו. כמו כן, קופת דוכן הסנדוויצ'ים ריקה עד לקבלת התשלום מהאדם הראשון. בכמה דרכים ניתן לסדר את האנשים בתור כך שכל אדם יוכל לקבל עודף בעת הקניה (כשעודף למשלם בשקלים ניתן בשקלים ועודף למשלם באירו ניתן באירו) ?

1.  $\frac{40!}{(10!)^4 11^2}$
2.  $\frac{20!^2}{(10!)^4 11^2}$
3.  $\frac{40!}{(10!)^2 21}$
4.  $\frac{40!}{11^2}$



שאלה 4 (10%)

כמה מספרים ישנם המורכבים מהספרות  $\{1,2,3\}$  כך שכל ספרה מופיעה בדיוק 3 פעמים ולא מופיעה הרצף 23?

1. 320

2. 400

3. 420

4. 500

שאלה 5 (10%)

מהו מספר המלבנים במישור ה- $xy$  (בעלי שטח גדול מ-0) כך שכל קדקוד במלבן הוא נקודה  $(a, b)$ , כאשר  $a$  ו- $b$  מספרים שלמים,  $-5 \leq a \leq 5$ ,  $-6 \leq b \leq 6$ , וכל צלע של המלבן מקבילה לציר ה- $x$  או לציר ה- $y$ ?

1.  $\frac{143 \cdot 12 \cdot 10}{4!}$

2.  $\binom{143}{2}$

3.  $\binom{143}{4}$

4.  $\binom{11}{2} \binom{13}{2}$