מס' נבחן:_______________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' סמסטר אביב	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין
22.7.2015 9:00	טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר, גיל קרן
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

שאלה	1		2		3		4		5	
ציון										

סה"כ	

מס' נבחן:__________________

<u>שאלה 1</u>

<u>סעיף א (15 נק')</u>

יהי $n \geq 1$, הוכיחו כי בגרף חסר משולשים עם 2n קדקודים יש לכל היותר n^2 צלעות.

הוכח בכיתה.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>
הוכיחו כי בגרף 6-רגולרי קשיר עם 14 קודקודים קיימת קבוצה בלתי תלויה מגודל 3.

<u>פתרון:</u>
יהי v קדקוד כלשהו בגרף, נביט ב-S: קבוצת שבעת הקדקודים שאינם שכנים של v. אם קיימים שני קדקודים x,y ב-S שאינם מחוברים בצלע זה לזה, הרי הקבוצה {v,x,y} הינה קבוצה בת"ל מגודל 3. אחרת, כל קודקודי S מחוברים זה לזה, ויוצרים קליקה מגודל 7. כיוון שהגרף 6-רגולרי, אין אף קשת מקדקוד ב-S לקדקוד שאינו ב-S, וזו בסתירה לכך שהגרף קשיר (לא ניתן להגיע מקדקוד של S לקדקוד שאינו ב-S).

מס' נבחן:________________

שאלה 2

סעיף א (15 נק')

יהא G גרף קשיר 3-רגולרי ומישורי שכל פאותיו משולשים או משושים (גם הפאה האינסופית).
כמה משולשים ישנם ב-G?

פתרון:

נסמן ב-m את מספר הצלעות, ב-n את מספר הקדקודים, ב-f את מספר הפאות, וב-k את מספר המשולשים בגרף.

כיוון שהגרף 3-רגולרי נקבל ממשפט הדרגות $2\mathrm{m} = \sum_{\mathrm{v} \in \mathrm{V}} \deg(\mathrm{v}) = 3\mathrm{n}$ (*)

נסמן ב t_F את מספר הצלעות החלות בפאה F. כיוון שכל פאה היא משולש או משושה, וכל צלע חלה בבדיוק 2 פאות, נקבל $6f - 3k = 3k + 6(f-k) = \sum_F t_F = 2m$ (**)

הגרף מישורי וקשיר, לכן ניתן להשתמש בנוסחת אוילר וב(*) כדי לקבל $2 = n - m + f = f - \frac{m}{3}$.

נציב גם את (**) ונקבל $2 = f - \left(f - \frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2}$, כלומר מספר המשולשים הינו *k=4*.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

יהי $G = (X, Y, E)$ גרף קשיר דו-צדדי, כך שלכל צלע $e \in E$ קיים זיווג מושלם של G המכיל אותה.
הוכיחו כי לכל $\emptyset \neq A \subset X$ מתקיים $|\Gamma(A)| > |A|$. (A מוכלת ממש ב-X.)

<u>פתרון:</u>

מכיוון שקיים זיווג מושלם, ממשפט Hall, לכל $A \subseteq X$, מתקיים $|\Gamma(A)| \geq |A|$ לכן אנחנו צריכים רק להוכיח שהאי שוויון הוא חזק לכל הקבוצות.

נניח בשלילה שקיימת קבוצה $\emptyset \neq A \subset X$ כך ש $|\Gamma(A)| = |A|$. נביט ב $B = \Gamma(\Gamma(A))$ (קבוצת השכנים של קבוצת השכנים של A). לא יתכן כי $B \subseteq A$, כי במקרה זה לא ניתן להגיע מאף קדקוד של A לקדקוד ב-$X \setminus A$, כלומר הגרף אינו קשיר. לכן יש צלע $\{v, u\} \in E$ בין קודקוד $v \in \Gamma(A)$ לבין $u \in B \setminus A$.

מהנתון, קיים זיווג מושלם M המכיל את $\{v, u\}$. בפרט בM, כל קודקוד בA משודך לקודקוד ב$\Gamma(A)$ שאינו v. כלומר אנחנו משדכים $|A|$ קודקודים ל$|\Gamma(A) \setminus \{v\}| = |A| - 1$ קודקודים. סתירה!

לכן לא יתכן כי $|\Gamma(A)| = |A|$, ובפרט לכל $\emptyset \neq A \subset X$ מתקיים $|\Gamma(A)| > |A|$ כנדרש.

מס' נבחן:________________

שאלה 3

סעיף א (15 נק')

הגרף G=(V,E) מוגדר כך: $V = \{A \subseteq \{1,2,\dots,8\} : |A| = 4\}$, $E = \{\{A,B\} : |A \cap B| = 2\}$.
הוכיחו כי ישנם ב-G מעגל אוילר ומעגל המילטון.

פתרון:

קדקוד בגרף נקבע ע"י בחירה של 4 איברים מתוך הקבוצה $\{1,2,\dots,8\}$, כלומר בחירה ללא חזרות וללא חשיבות לסדר. מכאן נובע שיש סה"כ $\binom{8}{4} = 70$ קודקודים בגרף.

כעת נחשב מהו מספר השכנים של כל קדקוד. בהינתן קדקוד מסוים v, שכן שלו הוא בחירה של שני איברים מv ועוד שני איברים שאינם בv (כי אז חיתוך השכן וv יהיה בדיוק 2). לכן מספר השכנים של v הוא:

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36$$

כיוון ש v קדקוד כללי כלשהו, זהו מספר השכנים של כל קדקוד. כלומר דרגת כל קדקוד בגרף היא 36.

כיוון שאם בגרף דרגת כל קדקוד היא לפחות מחצית ממספר הקודקודים, קיים בגרף מעגל המילטון (משפט דיראק), ודרגת כל קדקוד היא $36 \geq \frac{70}{2} = 35$, אז קיים בגרף מעגל המילטון. (ניתן גם להשתמש במשפט ORE).

כיוון שקיים בגרף מעגל המילטון, הגרף קשיר (קיים מעגל שמכיל את כל קודקודי הגרף).

כיוון שדרגת כל קודקודי הגרף זוגית (36) והגרף קשיר, קיים בגרף מעגל אוילר.

סעיף ב (10 נק')
בוחרים באקראי מספר שלם מתוך הקבוצה $\{1, \ldots, 1000\}$. מה ההסתברות שהמספר שנבחר מתחלק בלפחות אחד מהמספרים 2,3,5 ?

נסמן:

A_2 – קבוצת המספרים בקבוצה $\{1, \ldots, 1000\}$ המתחלקים ב 2.
A_3 – קבוצת המספרים בקבוצה $\{1, \ldots, 1000\}$ המתחלקים ב 3.
A_5 – קבוצת המספרים בקבוצה $\{1, \ldots, 1000\}$ המתחלקים ב 5.

$$|A_2| = \left\lfloor\frac{1000}{2}\right\rfloor = 500$$
$$|A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor = 333$$
$$|A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor = 200$$
$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor = 166$$
$$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{10}\right\rfloor = 100$$
$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{15}\right\rfloor = 66$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{30}\right\rfloor = 33$$

נסמן בA את המאורע בו נבחר מספר המתחלק ב**לפחות** אחד מבין *2,3,5* ונקבל:(הכלה והדחה) :

$$|A| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| =$$
$$=500+333+200-166-100-66+33=734$$

(זהו מספר המספרים בקבוצה $\{1, \ldots, 1000\}$ המתחלקים בלפחות 1 מבין *2,3,5*)

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{734}{1000}$$

שאלה 4

סעיף א (10 נק')

יהי G=(V,E) גרף קשיר על n קדקודים. עבור קדקוד $v \in V$ ומספר שלם $1 \leq k \leq n-1$ נגדיר את $d_k(v)$ להיות מספר הקדקודים בגרף שמרחקם מ-v הוא k.

1. הוכיחו שלכל k כנ"ל $\sum_{v\in V} d_k(v)$ הוא זוגי.
2. חשבו את הביטוי $\sum_{k=1}^{n-1}(\sum_{v\in V} d_k(v))$.

פתרון:

1. נגדיר גרף חדש G_k מעל קבוצת הקודקודים V, בו בין 2 קודקודים יש צלע אם ורק אם בG המרחק ביניהם הוא k. נשים לב שלכל $v \in V$, דרגתו בG_k שווה ל$d_k(v)$. ממשפט הדרגות $\sum_{v\in V} d_k(v)$ שווה לפעמים מספר הצלעות ב G_k, ובפרט זוגי.
2. לכל קודקוד $v \in V$, מתקיים $\sum_{k=1}^{n-1} d_k(v) = n-1$ כי כל קודקוד אחר תורם לסכום 1 בדיוק פעם אחת (נזכור שהגרף קשיר). נוכל להסיק:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{v\in V} d_k(v)\right) = \sum_{v\in V}\left(\sum_{k=1}^{n-1} d_k(v)\right) = \sum_{v\in V} n-1 = n(n-1)$$

דרך אלטרנטיבית: נשים לב כי עבור זוג קודקודים כלשהו $u,v \in V$ אשר נמצאים במרחק k בG, הם תורמים 1 ל$d_k(v)$ ו1 ל$d_k(u)$. בפרט כל זוג קודקודים תורמים בדיוק 2 לסכום. מכיוון שיש $\binom{n}{2}$ זוגות, נוכל להסיק $\sum_{k=1}^{n-1}(\sum_{v\in V} d_k(v)) = 2\cdot\binom{n}{2}$.

<u>סעיף ב (15 נק')</u>
יהי a_n מספר הסדרות מאורך *n* מעל *{a,b,c}* כך שהרצף *abc* לא מופיע. הגיעו לנוסחת נסיגה עבור a_n ורשמו את תנאי ההתחלה.

<u>פתרון:</u>
נגדיר 2 סדרות עזר:
יהי b_n מספר הסדרות מאורך *n* מעל *{a,b,c}* כך שהרצף *abc* לא מופיע ואינן מתחילות ברצף *bc*.
יהי c_n מספר הסדרות מאורך *n* מעל *{a,b,c}* כך שהרצף *abc* לא מופיע ואינן מתחילות ברצף *c*.
נתאר נוסחאות נסיגה עבור שלושת הסדרות:

(1) $a_n = b_{n-1} + 2 \cdot a_{n-1}$
(2) $b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$
(3) $c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

כדי לראות את (1), נשים לב שסדרה המתחילה ב-a ניתנת להשלמה ב b_{n-1} דרכים שונות, וסדרה המתחילה ב-b או c ניתנת להשלמה ב a_{n-1} דרכים שונות.
עבור (2), אם הסדרה מתחילה ב-a אזי שוב ישנן b_{n-1} דרכים להשלימה לסדרה חוקית, אם מתחילה ב-b אזי אסור שיופיע c, לכן יש c_{n-1} דרכים להשלימה, ואם מתחילה ב-c אזי כל a_{n-1} האפשרויות תקינות.
עבור (3), הסדרה עשויה להתחיל רק ב-a או ב-b, ומספר האפשרויות מחושב כמקודם.

נציב את (3) ב(2).

(4) $b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2}$

נבודד את b_n ב(1):

(5) $b_n = a_{n+1} - 2 \cdot a_n$

נציב את (5) ב(4):

(6) $a_{n+1} - 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_n - 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}$
(7) $a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 0 \cdot a_{n-1} - 1 \cdot a_{n-2}$
(8) $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - a_{n-3}$

תנאי התחלה:

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 9$$

שאלה 5

סעיף א (15 נק')

מערכת תאורה מורכבת מזוג נורות. במפעל מרכיבים את הנורות אחת אחרי השנייה, כאשר כל נורה מתקלקלת בהסתברות 0.2. אבל אם הראשונה אכן התקלקלה (הקלקול תמיד קורה בעת ההתקנה), יתאמצו יותר בהרכבת הנורה השנייה: היא תתקלקל בסיכוי 0.1 בלבד. מה הסיכוי שנקבל מערכת עם בדיוק נורה אחת עובדת?

פתרון:

שימו לב כי המילה "לפחות" שונתה בתחילת המבחן ל"בדיוק".

נגדיר: A – המאורע בו נורה 1 מקולקלת, B – המאורע בו נורה 2 מקולקלת.

נשים לב כי מנתוני השאלה: $P(A) = 0.2, P(B|A) = 0.1, P(B\,|\bar{A}\,) = 0.2$.

אנחנו נרצה למצוא את הסתברות המאורע בו בדיוק נורה אחת עובדת כלומר: $P(A\cap\bar{B}) + P(\bar{A}\cap B)$.

נחשב:

$$P(A\cap\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}|A) = 0.2\cdot 0.9 = 0.18$$
$$P(\bar{A}\cap B) = P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = 0.2\cdot 0.8 = 0.16$$

לכן סה"כ ההסתברות המבוקשת היא 0.34.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

נגריל גרף אקראי על n קדקודים, כך שכל אחת מ $\binom{n}{2}$ הצלעות האפשריות תהיה בגרף בהסתברות 1/2 באופן בלתי תלוי. הוכיחו כי בהסתברות לפחות $1-\frac{4}{\binom{n}{2}}$ מספר הצלעות בגרף הוא לפחות $\frac{\binom{n}{2}}{4}$.

(מרקוב: $\mathrm{Prob}(f \ge \lambda \cdot E[f]) \le 1/\lambda$ צ'בישב: $\mathrm{Prob}(|f - E[f]| \ge C) \le \mathrm{Var}[f]/C^2$)

<u>פתרון:</u>

לכל $1 \le i \le \binom{n}{2}$ נגדיר את f_i להיות המשתנה המקרי המציין של המאורע בו הצלע ה-i נמצאת בגרף.
ונגדיר את f להיות המשתנה המקרי של מספר הצלעות בגרף. נשים לב כי $f = \sum_i f_i$, וגם כי לכל i מתקיים ש $E[f_i] = \frac{1}{2},\ Var[f_i] = E[f_i^2] - E[f_i]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

מלינאריות התוחלת:

$$E[f] = \sum_i E[f_i] = \frac{1}{2} \cdot \binom{n}{2}$$

ומשום שעבור כל $i \ne j$ המשתנים המקרים f_i, f_j הם בלתי תלויים, מתקיים גם

$$Var[f] = \sum_i Var[f_i] = \frac{1}{4} \cdot \binom{n}{2}$$

כעת, אנו מעוניינים בהסתברות $P\left(f \ge \frac{\binom{n}{2}}{4}\right)$ או בהסתברות המשלימה $P\left(f < \frac{\binom{n}{2}}{4}\right)$.

נשים לב כי $P\left(f < \frac{\binom{n}{2}}{4}\right) = P\left(\frac{\binom{n}{2}}{4} < E[f] - f\right) \le P\left(|f - E[f]| > \frac{\binom{n}{2}}{4}\right)$

ומאי שוויון צ'בישב נקבל:

$$P\left(|f - E[f]| > \frac{\binom{n}{2}}{4}\right) \le \frac{Var[f]}{\left(\frac{\binom{n}{2}}{4}\right)^2} = \frac{4}{\binom{n}{2}}$$

לכן הסתברות המאורע המשלים כנדרש:

$$P\left(f \ge \frac{\binom{n}{2}}{4}\right) \ge 1 - \frac{4}{\binom{n}{2}}$$

בהצלחה !