

**אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב**

פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין	מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' סמסטר אביב
טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר, גיל קרן	22.7.2015 9:00
אסור	חומר עזר
שלוש שעות	משך הבחינה

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטייטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטייטה.**

בהצלחה !

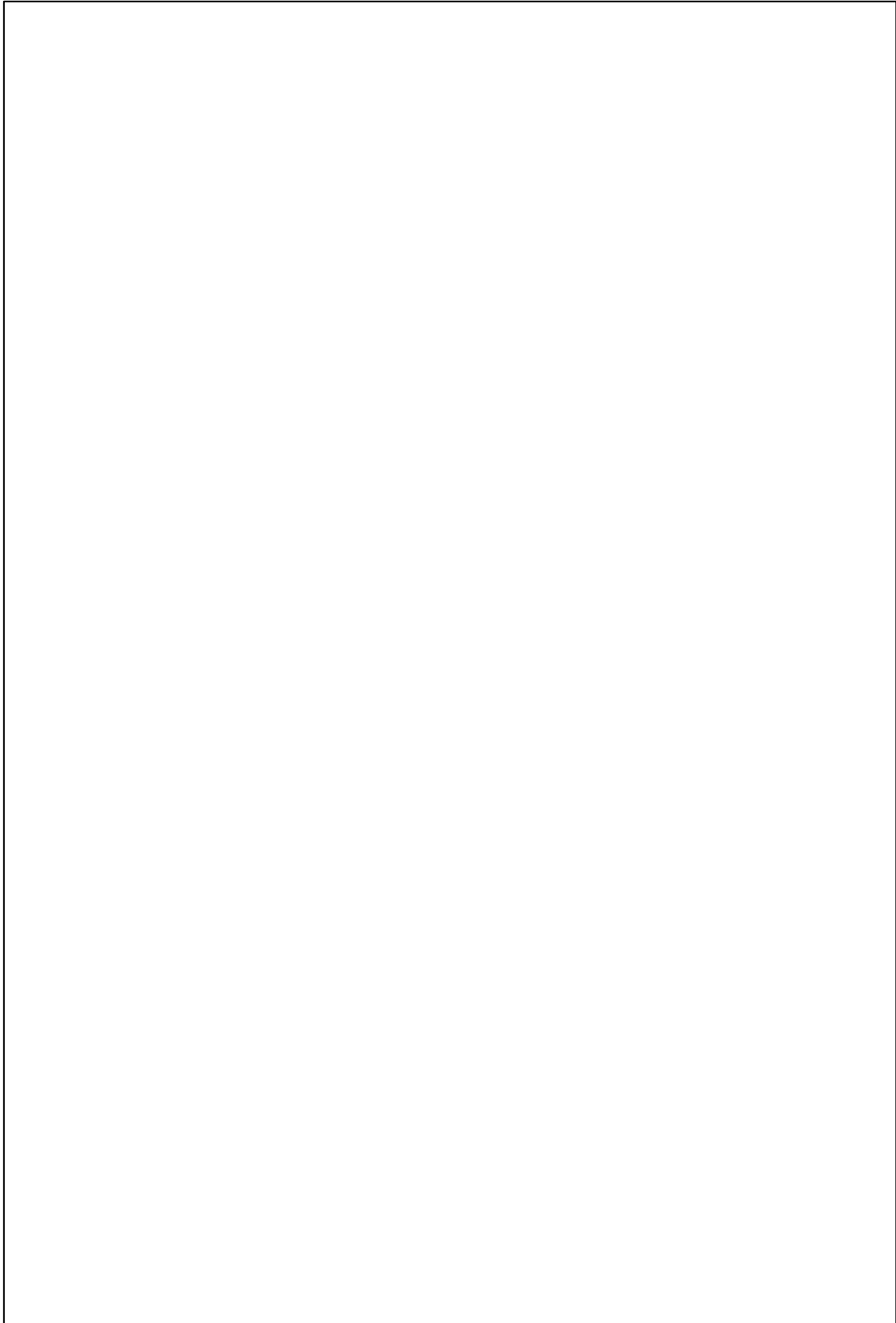
5	4	3	2	1	שאלה
					ציון

סה"כ	
-------------	--

שאלה 1

סעיף א (15 נק')

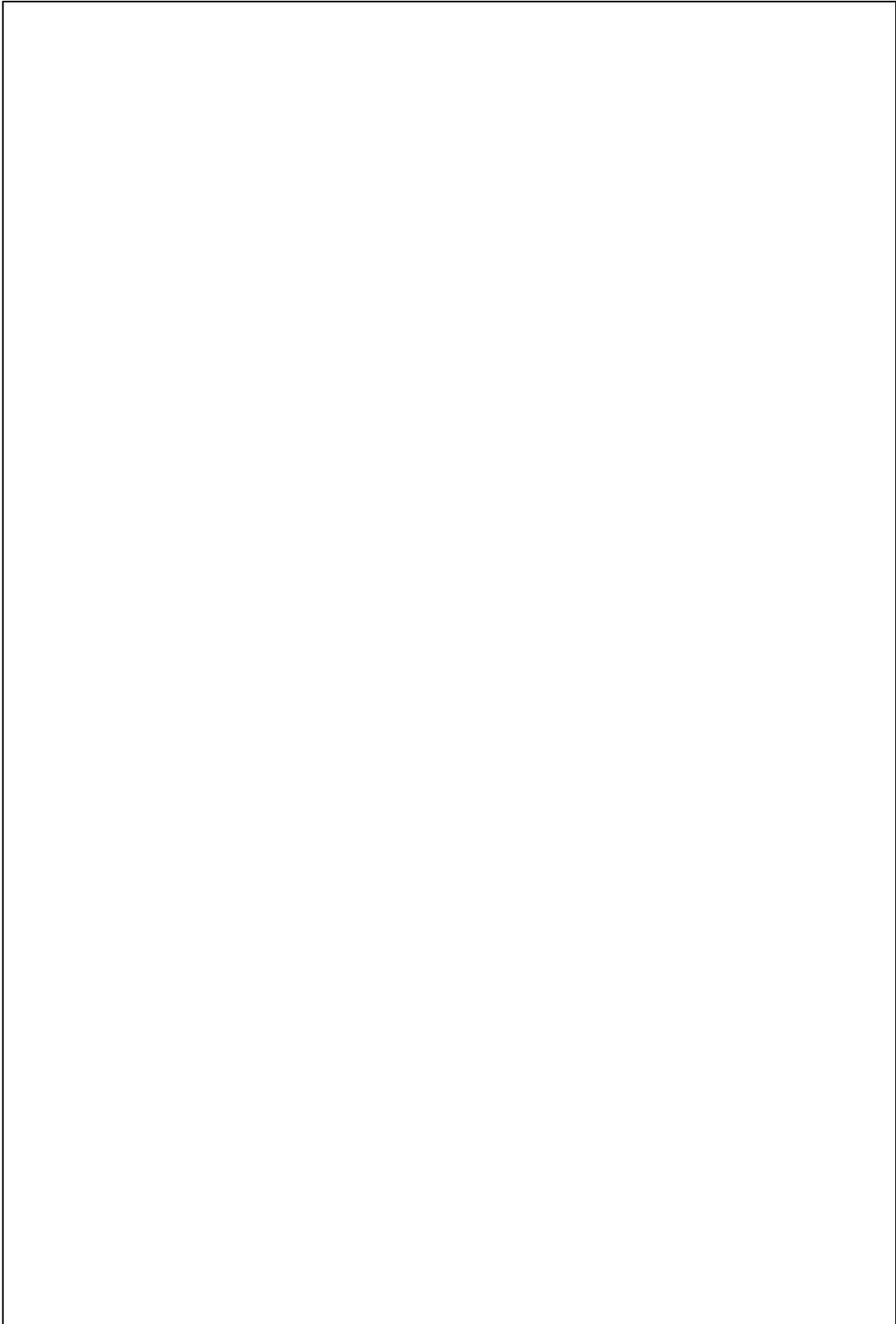
יהי $n \geq 1$, הוכיחו כי בגרף חסר משולשים עם $2n$ קדקודים יש לכל היותר n^2 צלעות.



מס' נבחן: _____

סעיף ב (10 נק')

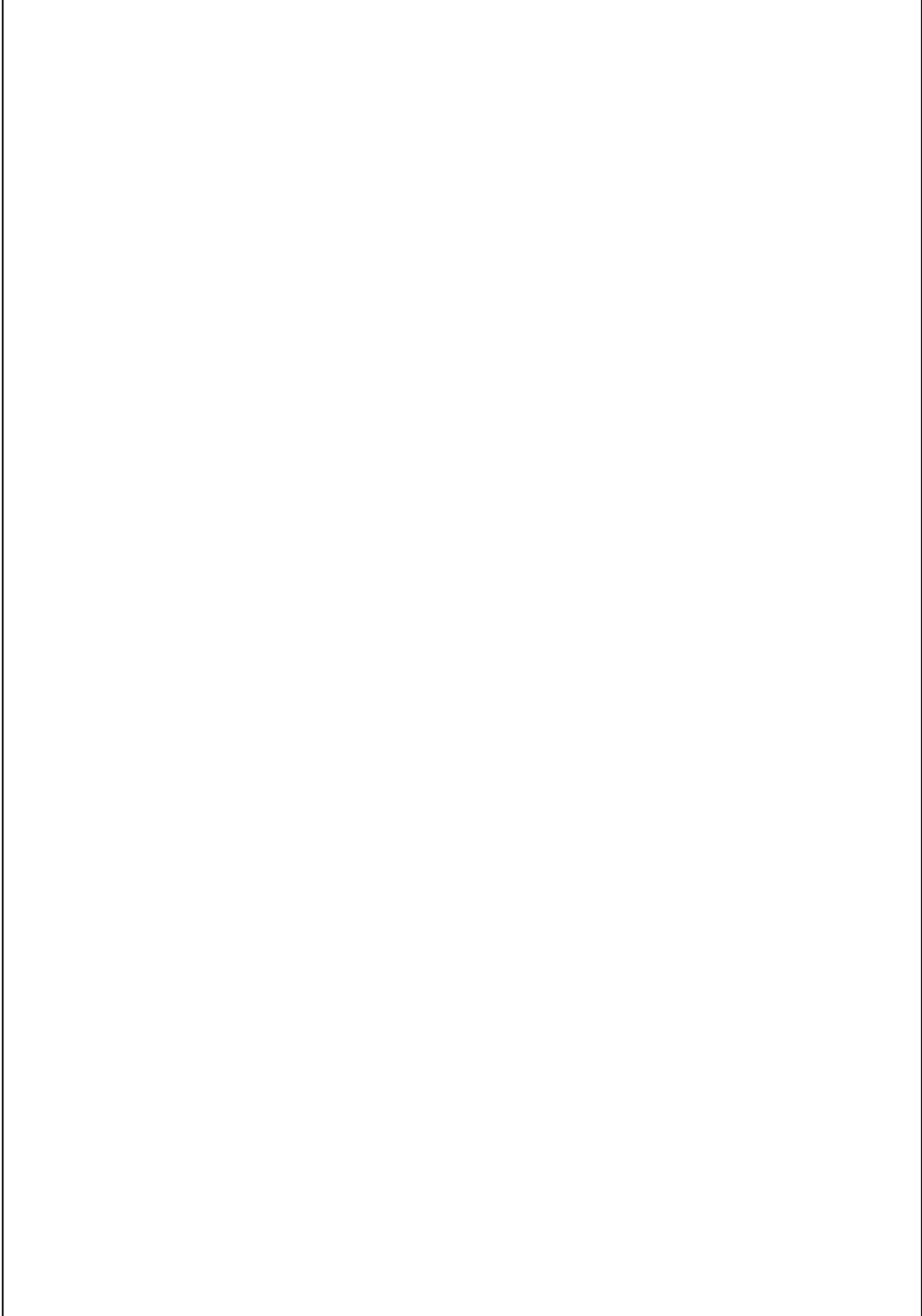
הוכיחו כי בגרף 6-רגולרי קשיר עם 14 קודקודים קיימת קבוצה בלתי תלויה מגודל 3.



שאלה 2

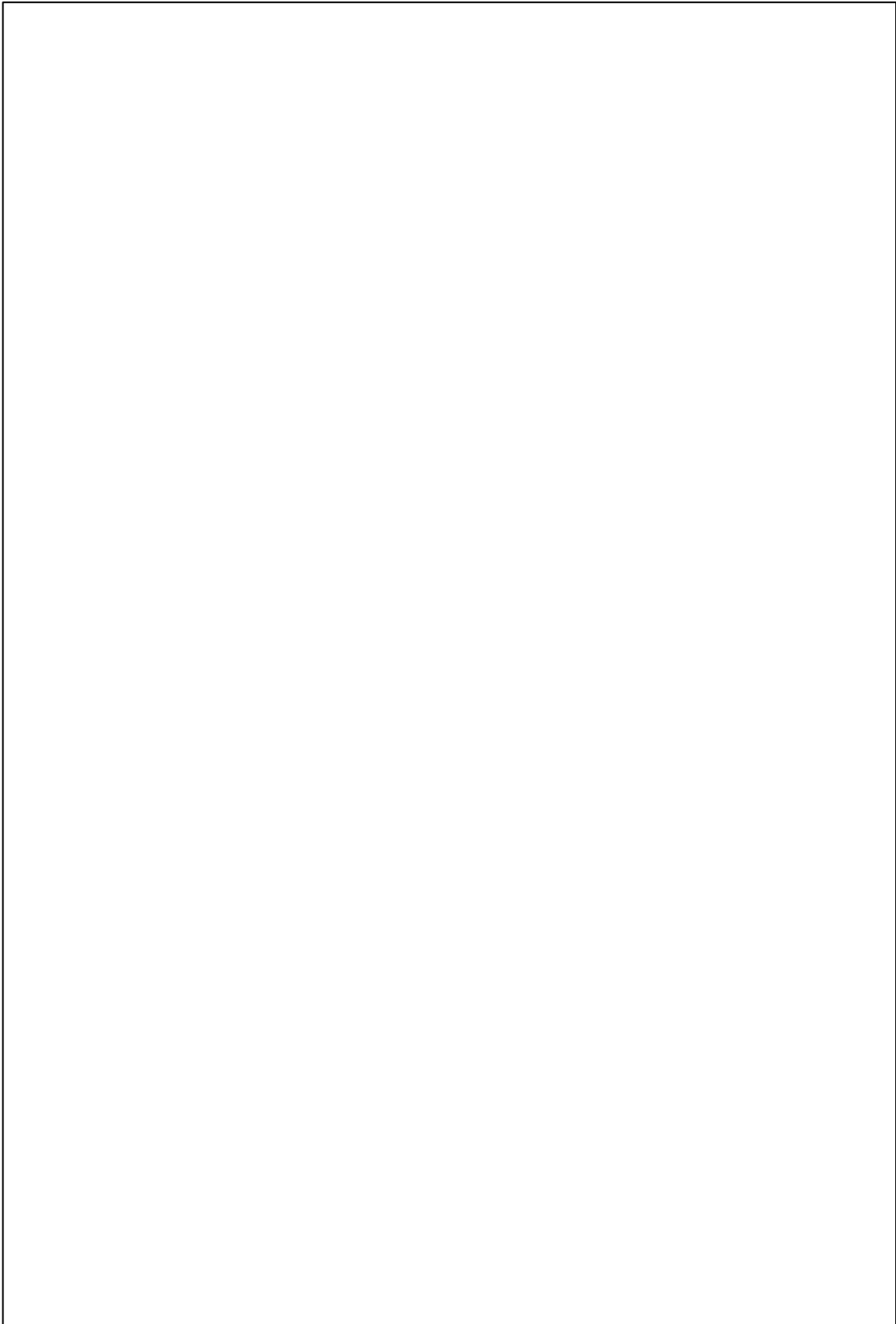
סעיף א (15 נק')

יהא G גרף קשיר 3-רגולרי ומישורי שכל פאותיו משולשים או משושים (גם הפאה האינסופית). כמה משולשים ישנם ב- G ?



סעיף ב (10 נק')

יהי $G = (X, Y, E)$ גרף קשיר דו-צדדי, כך שלכל צלע $e \in E$ קיים זיווג מושלם של G המכיל אותה. הוכיחו כי לכל $\emptyset \neq A \subset X$ מתקיים $|\Gamma(A)| < |A|$. (A מוכלת ממש ב- X).



סעיף א (15 נק')

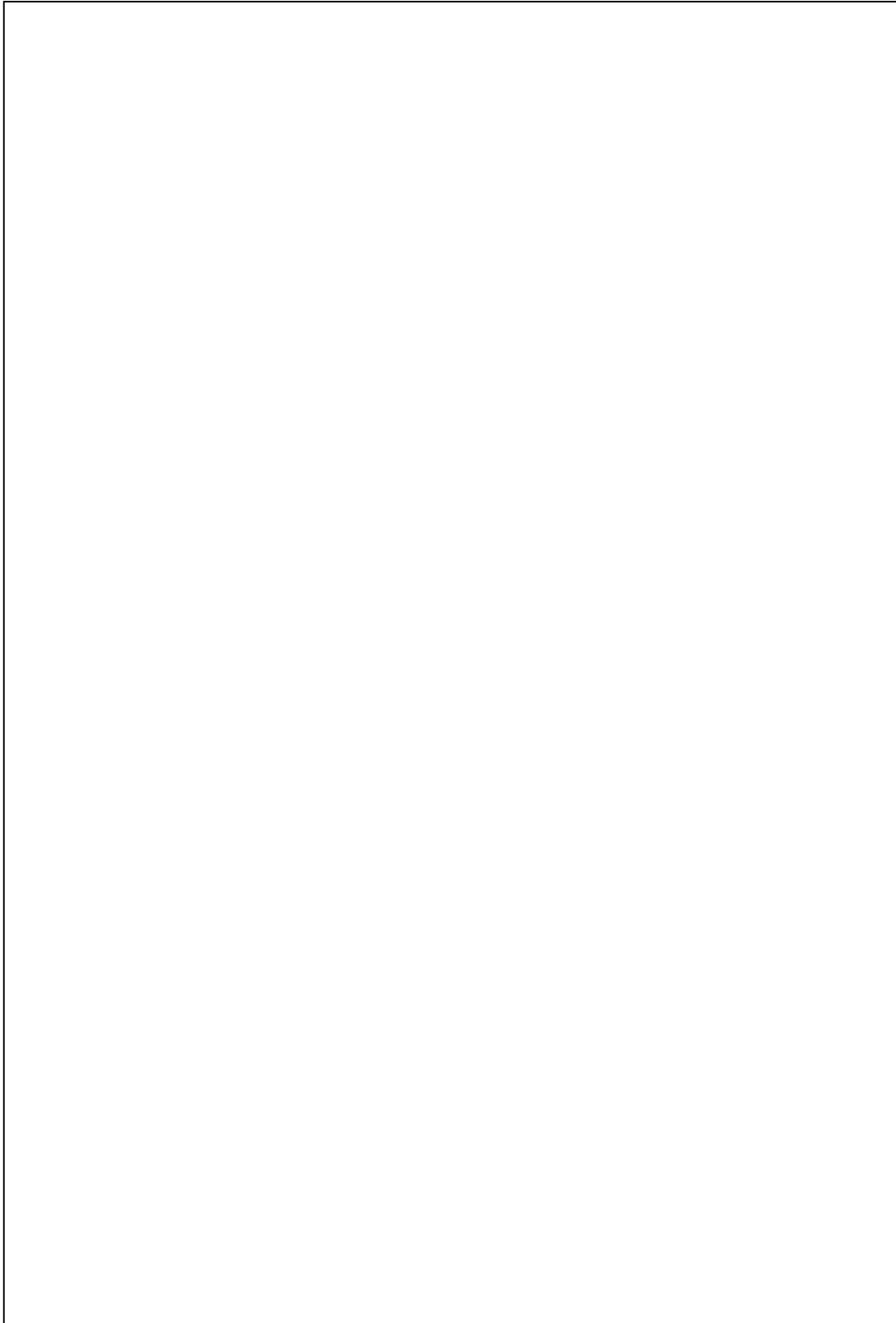
הגרף $G=(V,E)$ מוגדר כך: $V = \{A \subseteq \{1,2, \dots, 8\} : |A| = 4\}$, $E = \{\{A, B\} : |A \cap B| = 2\}$.
הוכיחו כי ישנם ב- G מעגל אוילר ומעגל המילטון.



מס' נבחן: _____

סעיף ב (10 נק')

בוחרים באקראי מספר שלם מתוך הקבוצה $\{1, \dots, 1000\}$. מה ההסתברות שהמספר שנבחר מתחלק בלפחות אחד מהמספרים 2,3,5 ?



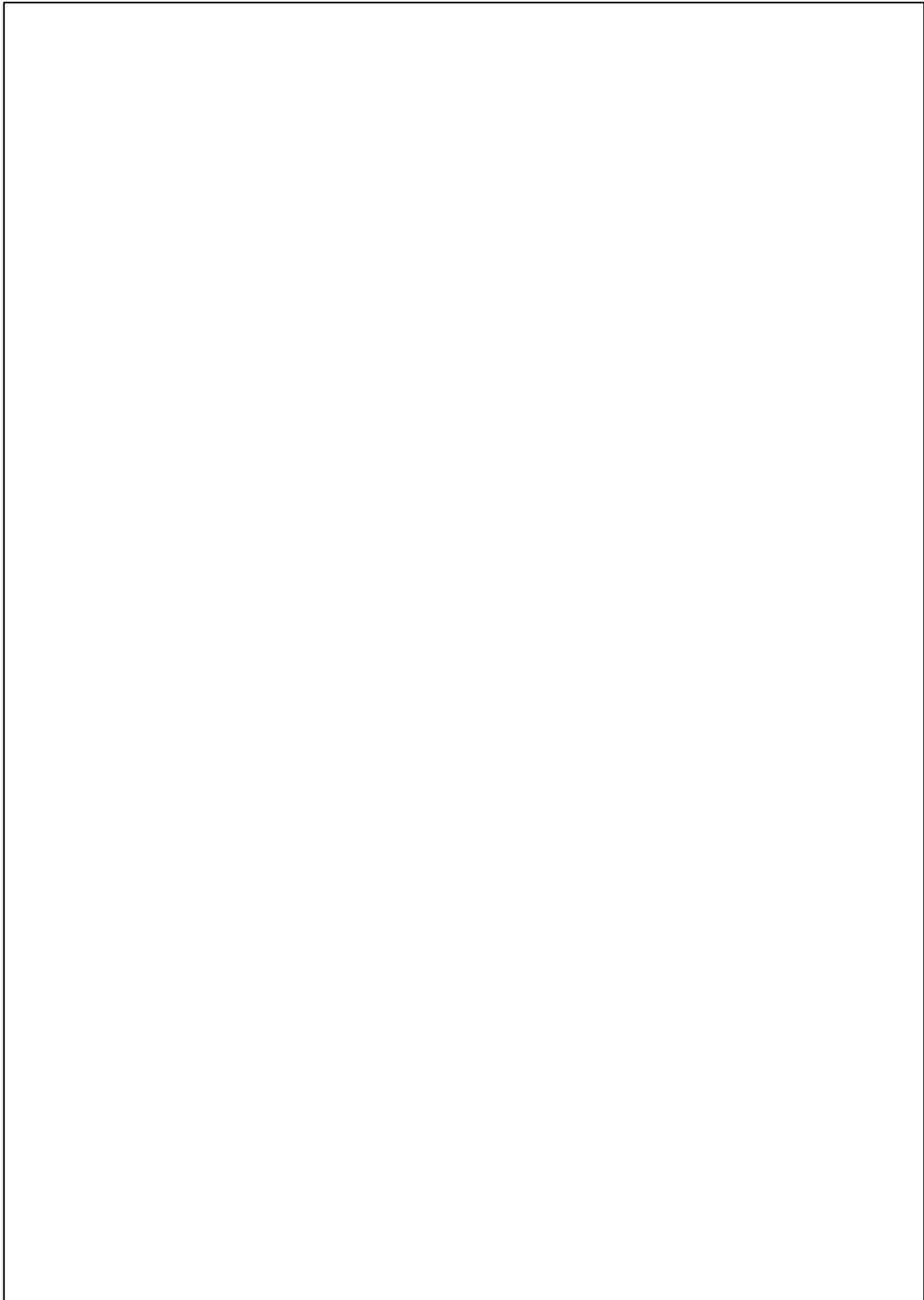
שאלה 4

סעיף א (10 נק')

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר על n קדקודים. עבור קדקוד $v \in V$ ומספר שלם $1 \leq k \leq n - 1$ נגדיר את $d_k(v)$ להיות מספר הקדקודים בגרף שמרחקם מ- v הוא k .

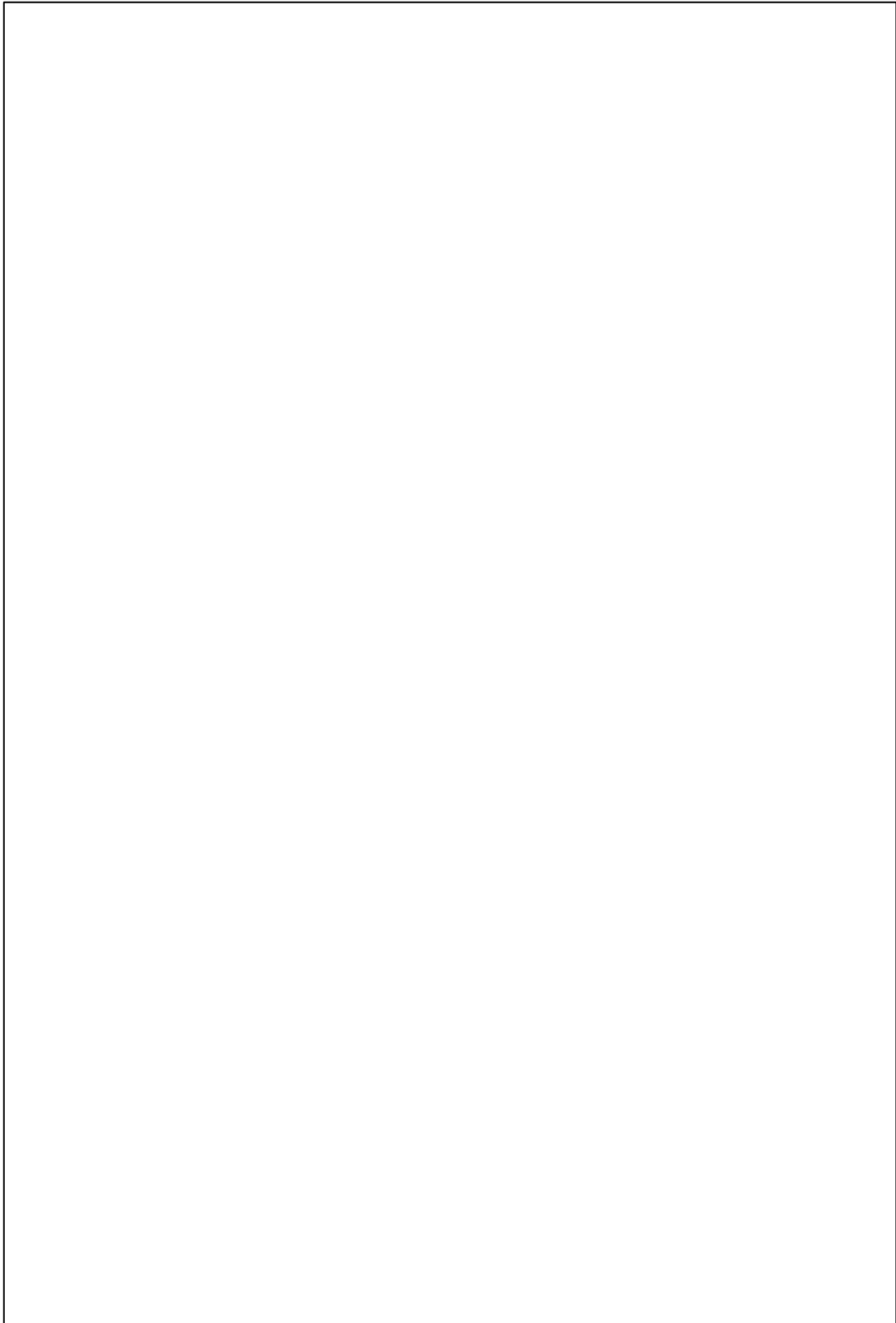
1. הוכיחו שלכל k כנ"ל $\sum_{v \in V} d_k(v)$ הוא זוגי.

2. חשבו את הביטוי $\sum_{k=1}^{n-1} (\sum_{v \in V} d_k(v))$.



סעיף ב (15 נק')

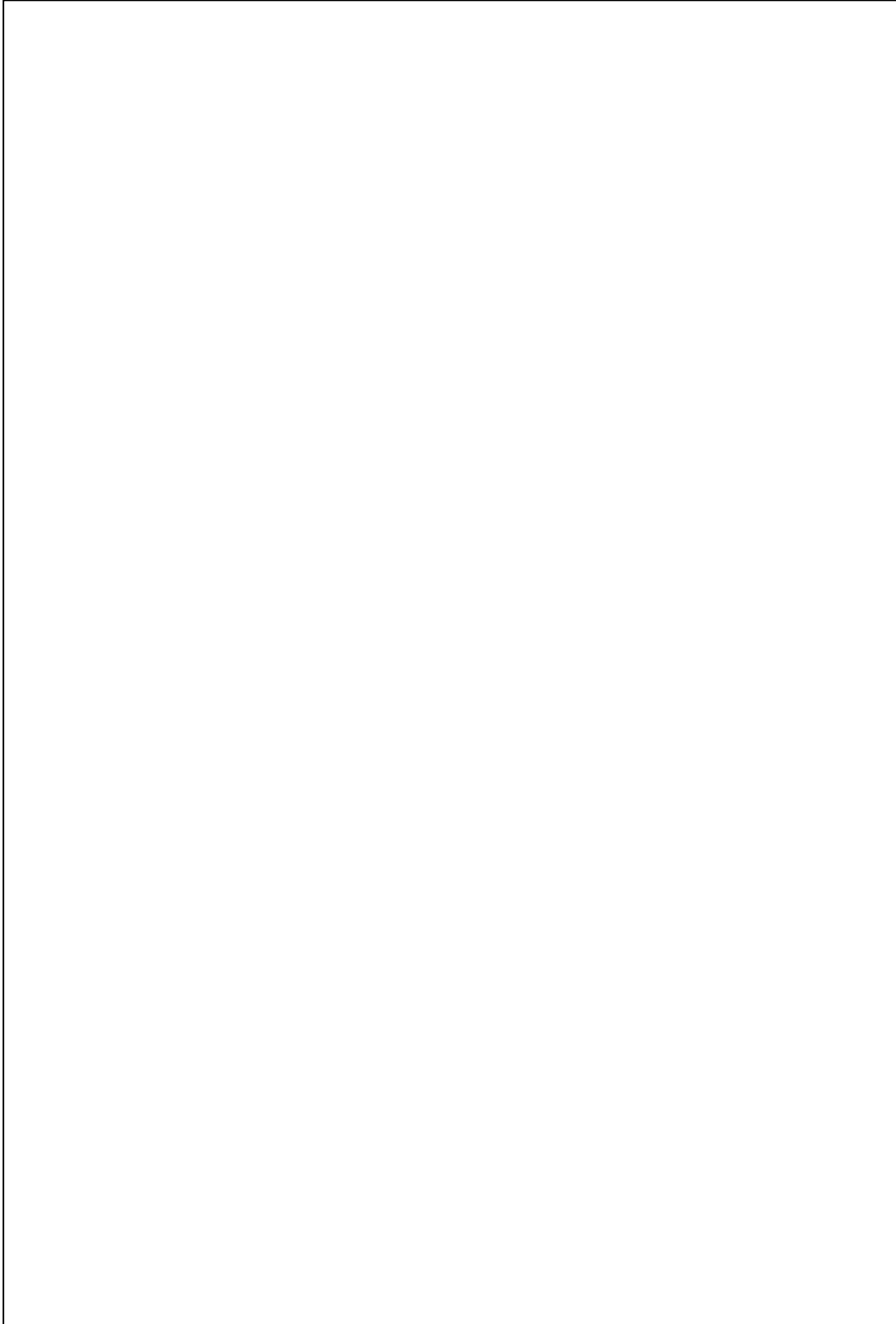
יהי a_n מספר הסדרות מאורך n מעל $\{a,b,c\}$ כך שהרצף abc לא מופיע. הגיעו לנוסחת נסיגה עבור a_n ורשמו את תנאי ההתחלה.



שאלה 5

סעיף א (15 נק')

מערכת תאורה מורכבת מזוג נורות. במפעל מרכיבים את הנורות אחת אחרי השנייה, כאשר כל נורה מתקלקלת בהסתברות 0.2. אבל אם הראשונה אכן התקלקלה (הקלקול תמיד קורה בעת ההתקנה), יתאמצו יותר בהרכבת הנורה השנייה: היא תתקלקל בסיכוי 0.1 בלבד. מה הסיכוי שנקבל מערכת עם לפחות נורה אחת עובדת?



סעיף ב (10 נק')

נגריל גרף אקראי על n קדקודים, כך שכל אחת מ $\binom{n}{2}$ הצלעות האפשריות תהיה בגרף בהסתברות $1/2$ באופן

בלתי תלוי. הוכיחו כי בהסתברות לפחות $1 - \frac{4}{\binom{n}{2}}$ מספר הצלעות בגרף הוא לפחות $\frac{\binom{n}{2}}{4}$.

(מרקוב: $\text{Prob}(f \geq \lambda \cdot E[f]) \leq 1/\lambda$ צ'בישב: $\text{Prob}(|f - E[f]| \geq C) \leq \text{Var}[f]/C^2$)

בהצלחה !