

**אוניברסיטת בן-גוריון  
המחלקה למדעי המחשב**

פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין	<b>מבנים בדידים וקומבינטוריקה</b> 202-1-1061 מועד א' סמסטר אביב
טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר, גיל קרן	1.7.2015 9:00
<b>אסור</b>	חומר עזר
שלוש שעות	משך הבחינה

**הנחיות חשובות:**

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטייטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטייטה.**

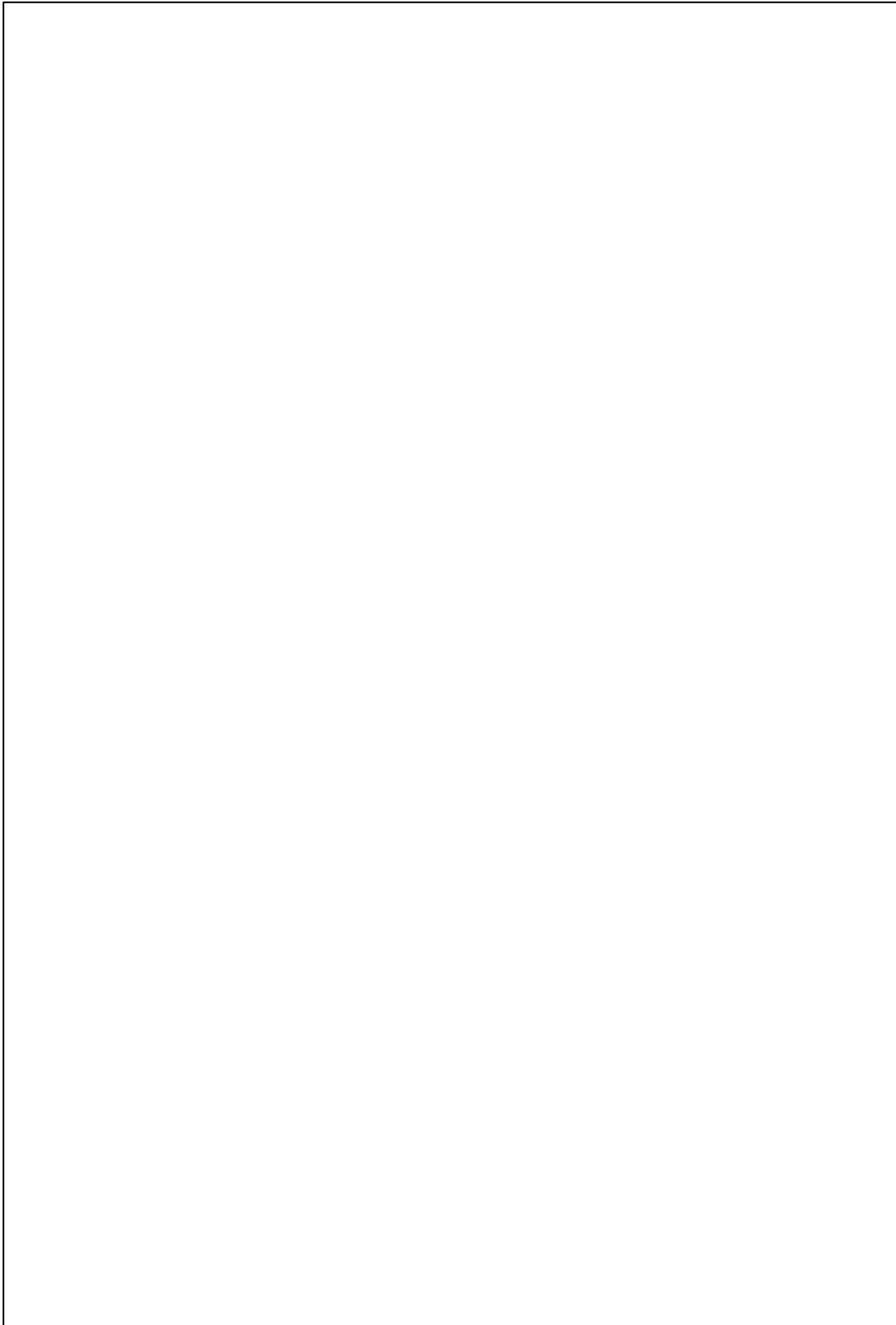
**בהצלחה !**

5	4	3	2	1	שאלה
					ציון

<b>סה"כ</b>	
-------------	--

שאלה 1

סעיף א (12 נק')  
הוכיחו כי כל גרף מישורי הוא 5-צביע.

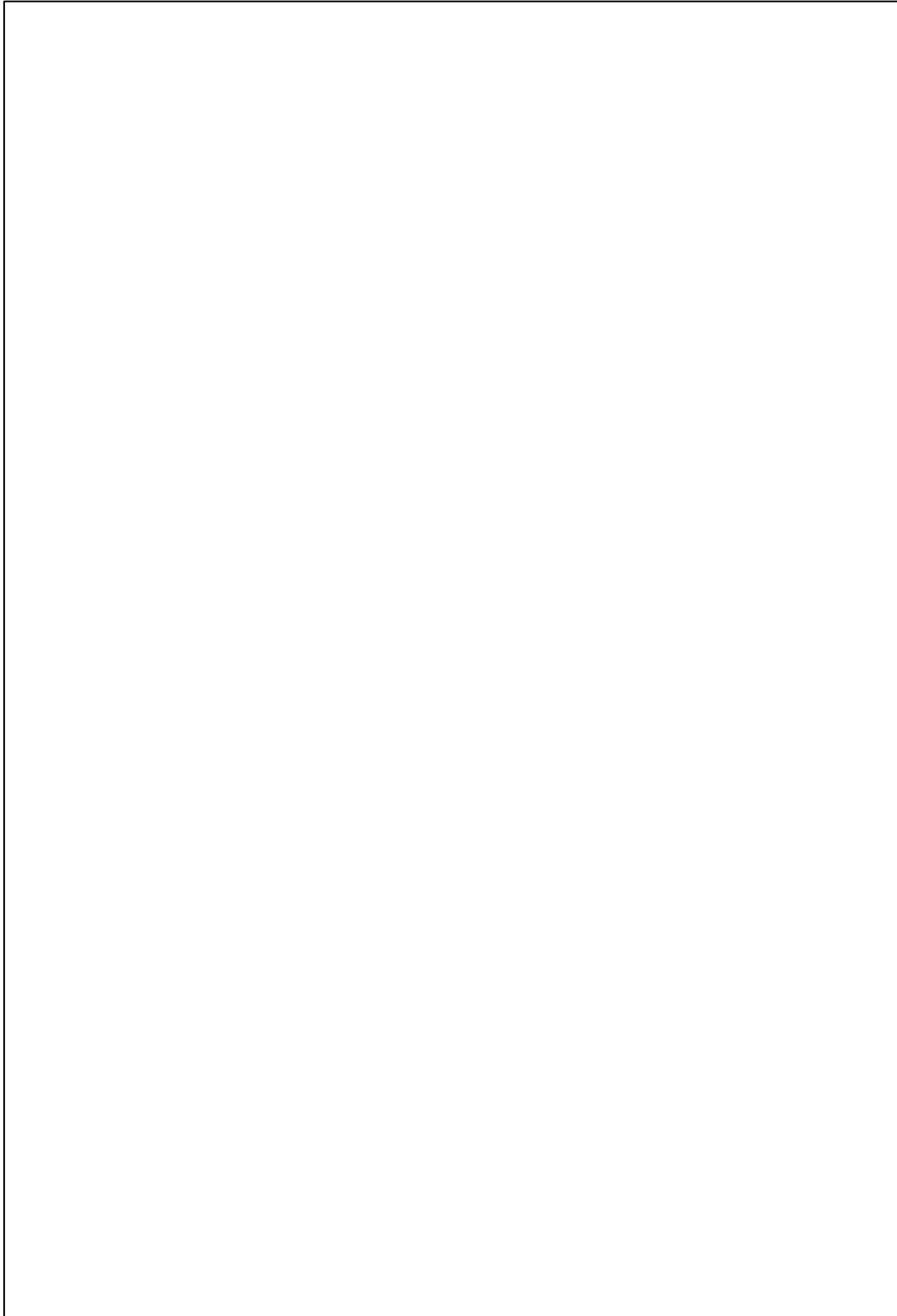


מס' נבחן: \_\_\_\_\_

סעיף ב (13 נק')

יהי  $G$  גרף עם  $m$  צלעות. הוכיחו כי לכל  $k \geq 1$  קיים תת-גרף  $H$  של  $G$  על אותה קבוצת קדקודים, שהוא  $k$ -צביע ומכיל לפחות  $m \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  צלעות.

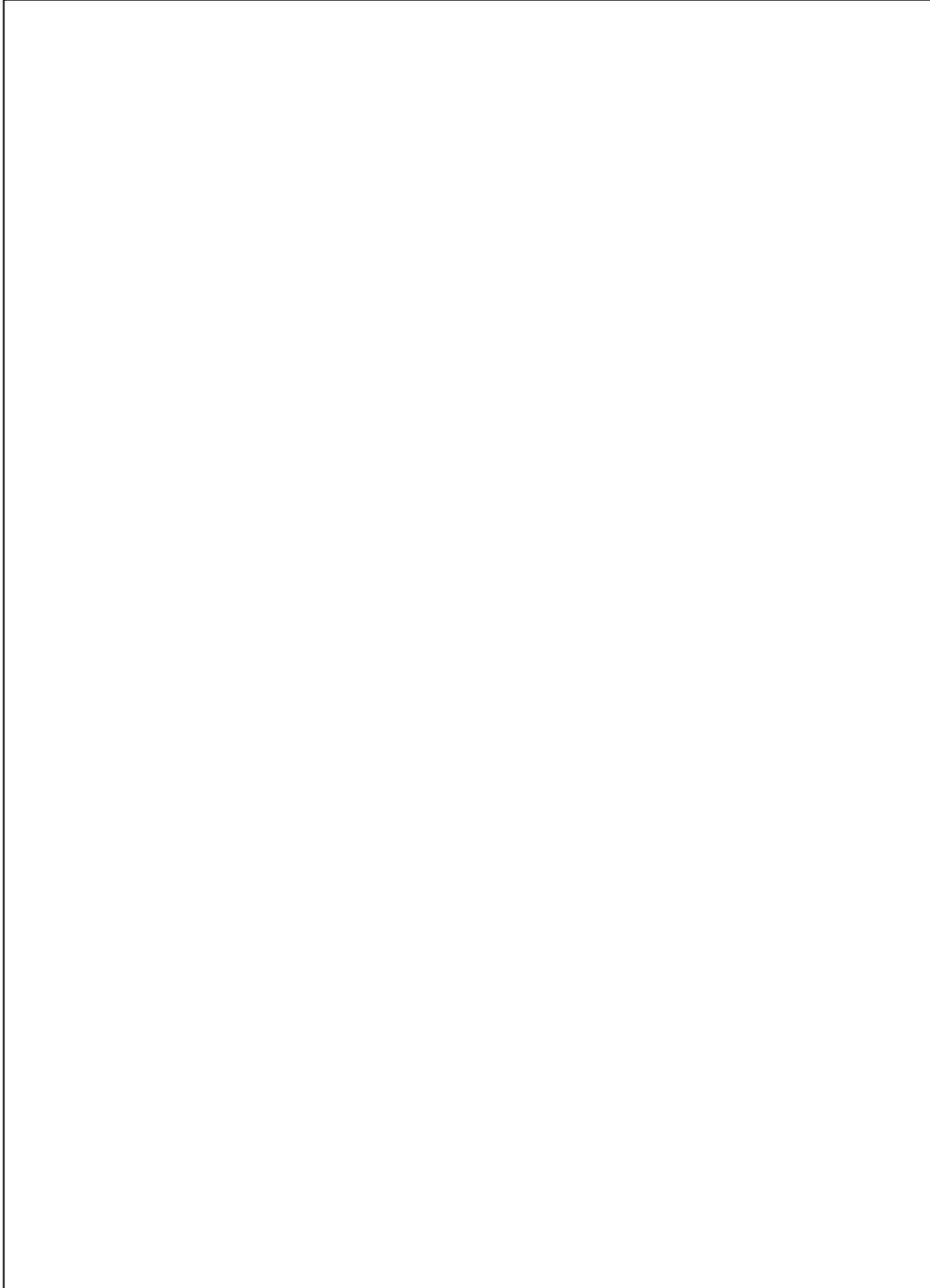
רמז: השתמשו בצביעה מקרית של קדקודי הגרף.



שאלה 2

סעיף א (12 נק')

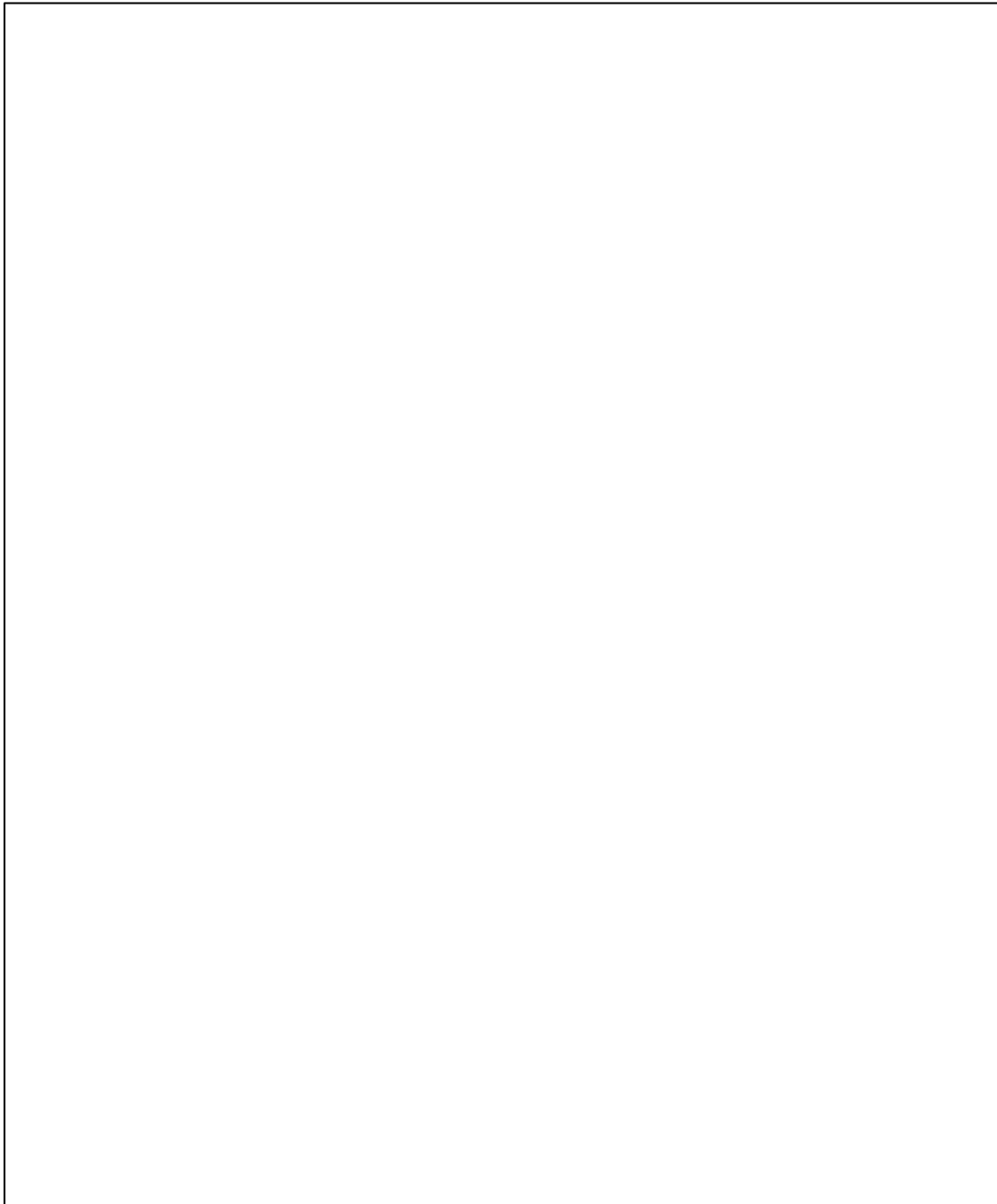
הוכיחו: בגרף  $G$  בו מספר השכנים המשותפים של כל שני קדקודים הוא אי זוגי, יש מעגל אוילר.



מס' נבחן: \_\_\_\_\_

סעיף ב (13 נק')

יהי  $a_n$  מספר הסדרות באורך  $n$  מעל  $\{1,2,3,4,5\}$  כך שסכום איבריהן הוא זוגי. מצאו נוסחת נסיגה עבור  $a_n$  ואת ערכי ההתחלה הנדרשים (אין צורך לפתור את הנוסחה).



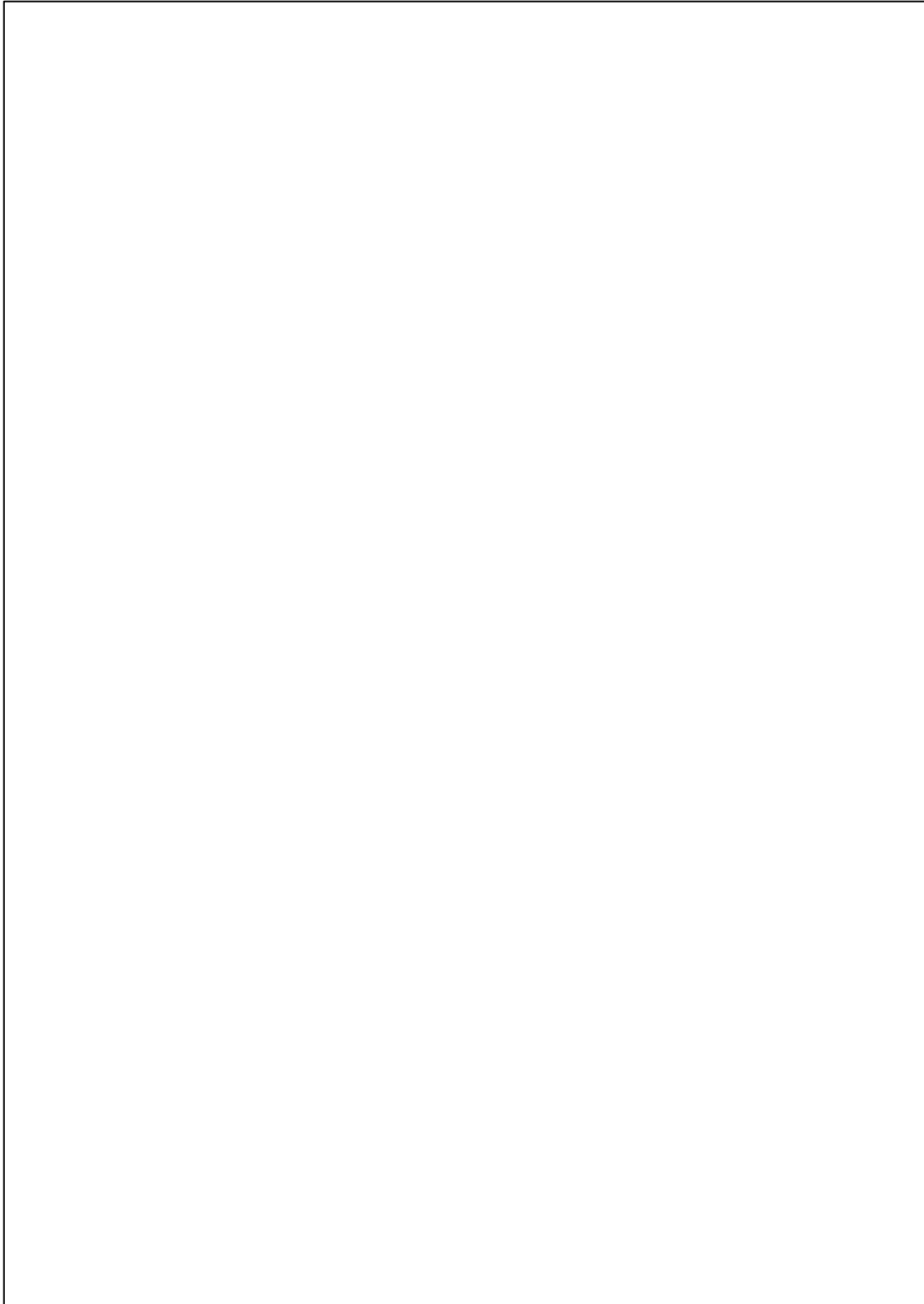
שאלה 3

סעיף א (13 נק')

יהי  $k$  מספר שלם חיובי. הוכיחו:

בגרף דו-צדדי  $G = (V_1, V_2, E)$  בו לכל  $x \in V_1$ ,  $\deg(x) \geq k$ , ולכל  $y \in V_2$ ,  $\deg(y) \leq 2k$ , יש זיווג מגודל לפחות  $|V_1|/2$ .

(הנכם יכולים להסתמך על הגרסה הבאה של משפט Hall מבלי להוכיחה: יהי  $G = (X, Y, E)$  גרף דו-צדדי בו לכל  $A \subseteq X$  מתקיים  $|\Gamma(A)| \geq |A|$ , אזי יש ב- $G$  זיווג המרווה את  $X$ .)



סעיף ב (12 נק')

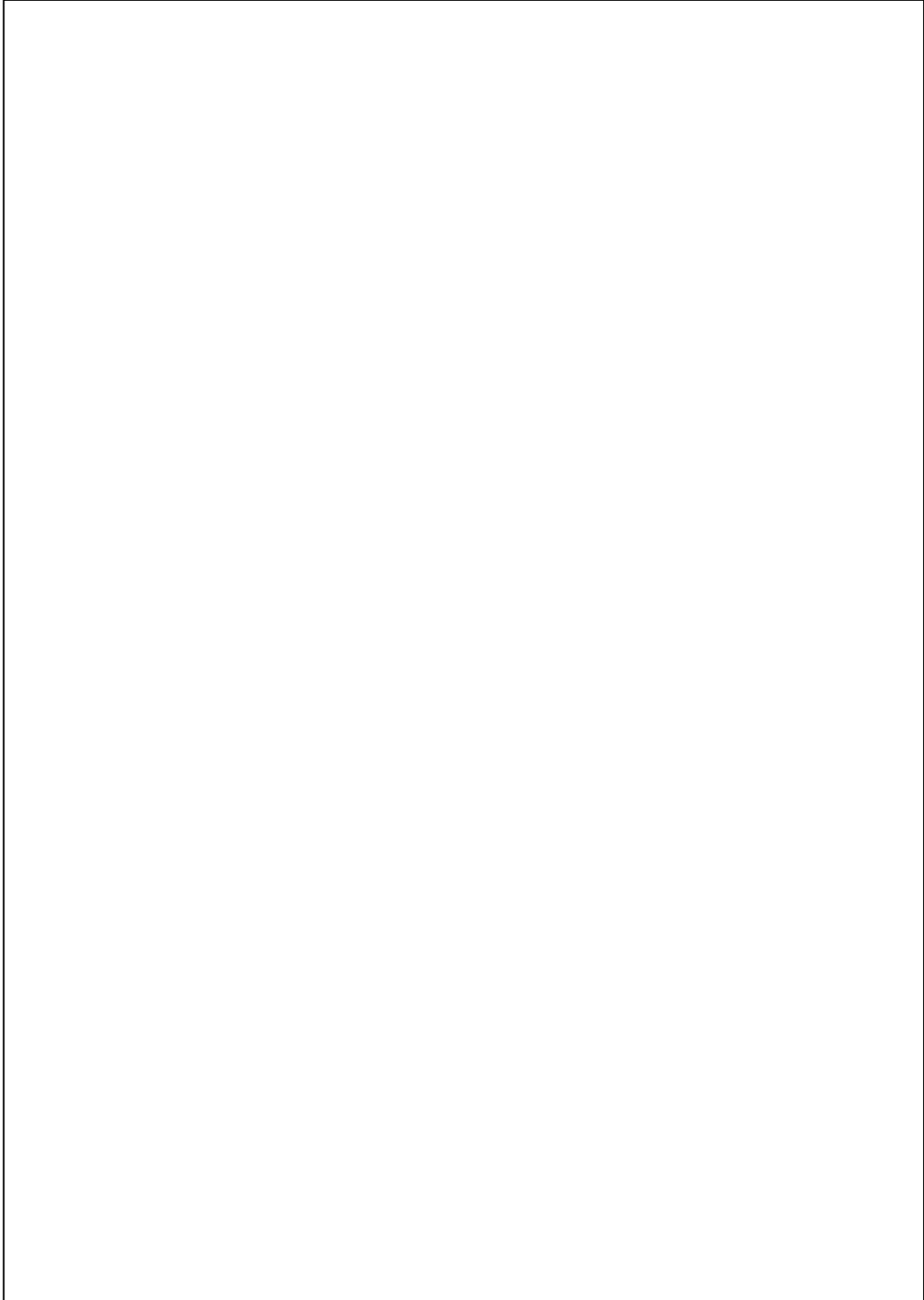
ביקשנו מהשכן להשקות עציץ בהעדרנו. נתון כי עם מים העציץ ימות בהסתברות 0.1, ובלי מים העציץ ימות בהסתברות 0.8. כמו כן, נתון כי השכן יזכור להשקות את העציץ בהסתברות 0.9.

1. מה ההסתברות שנמצא בשובנו עציץ חי?
2. בהינתן שהעציץ מת, מה ההסתברות שהשכן שכח להשקותו?

שאלה 4

סעיף א (15 נק')

בתמורה מקרית של  $\{1, \dots, n\}$ , מהי תוחלת מספר תתי הסדרות המונוטוניות עולות מאורך  $r$ , עבור  $1 \leq r \leq n$  נתון. (למשל, מספר תתי הסדרות המונוטוניות עולות מאורך 2 בתמורה (1,2,4,3) הוא 5.)

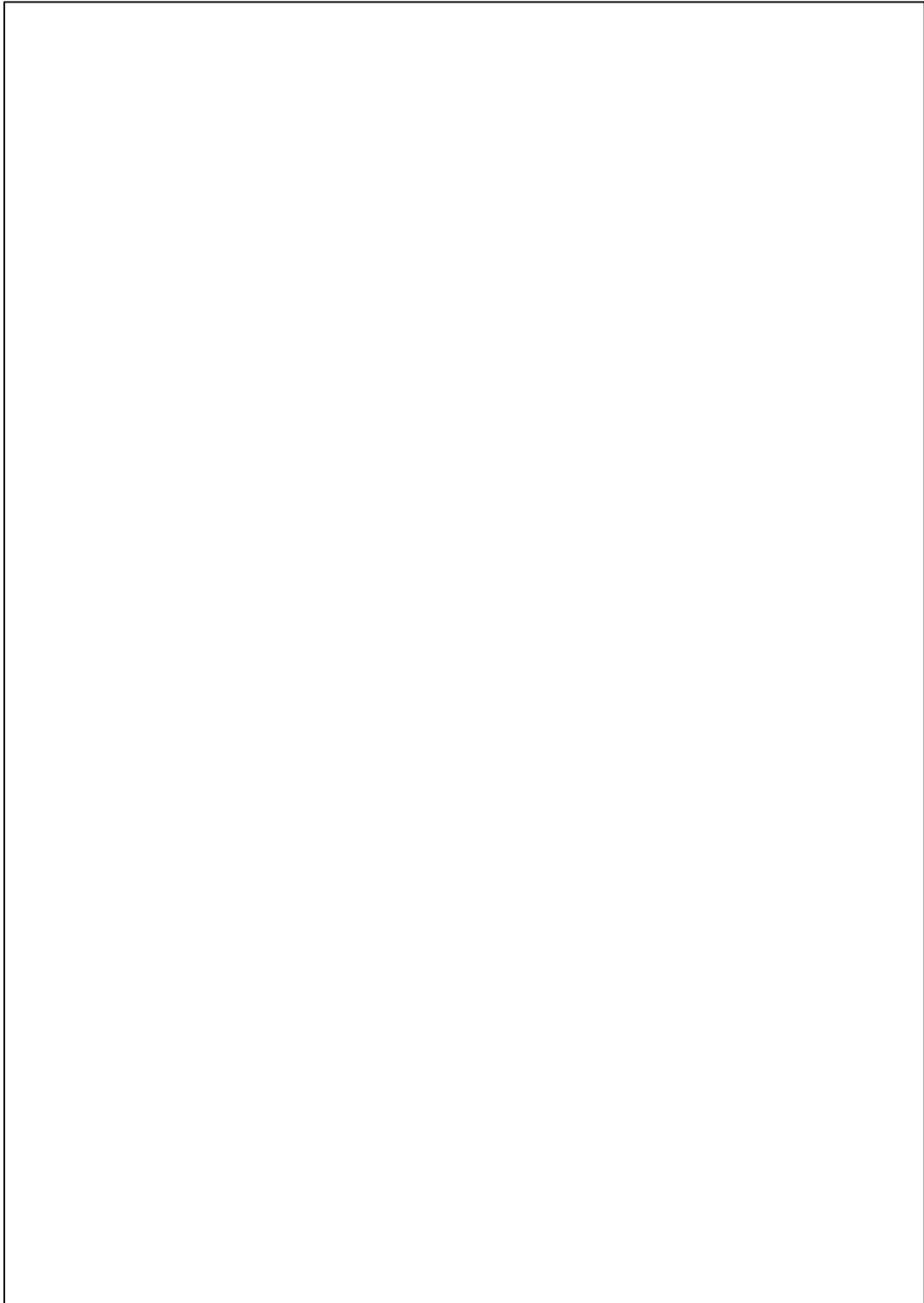




מס' נבחן: \_\_\_\_\_

סעיף ב (10 נק')

יהי  $G = (V, E)$  גרף מישורי ללא משולשים וללא מרובעים. הוכיחו כי  $m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$ , כאשר  $n = |V|$  ו-  
 $m = |E|$ .



שאלה 5

סעיף א (12 נק')

יהי  $2 \leq k \leq n - 1$ .

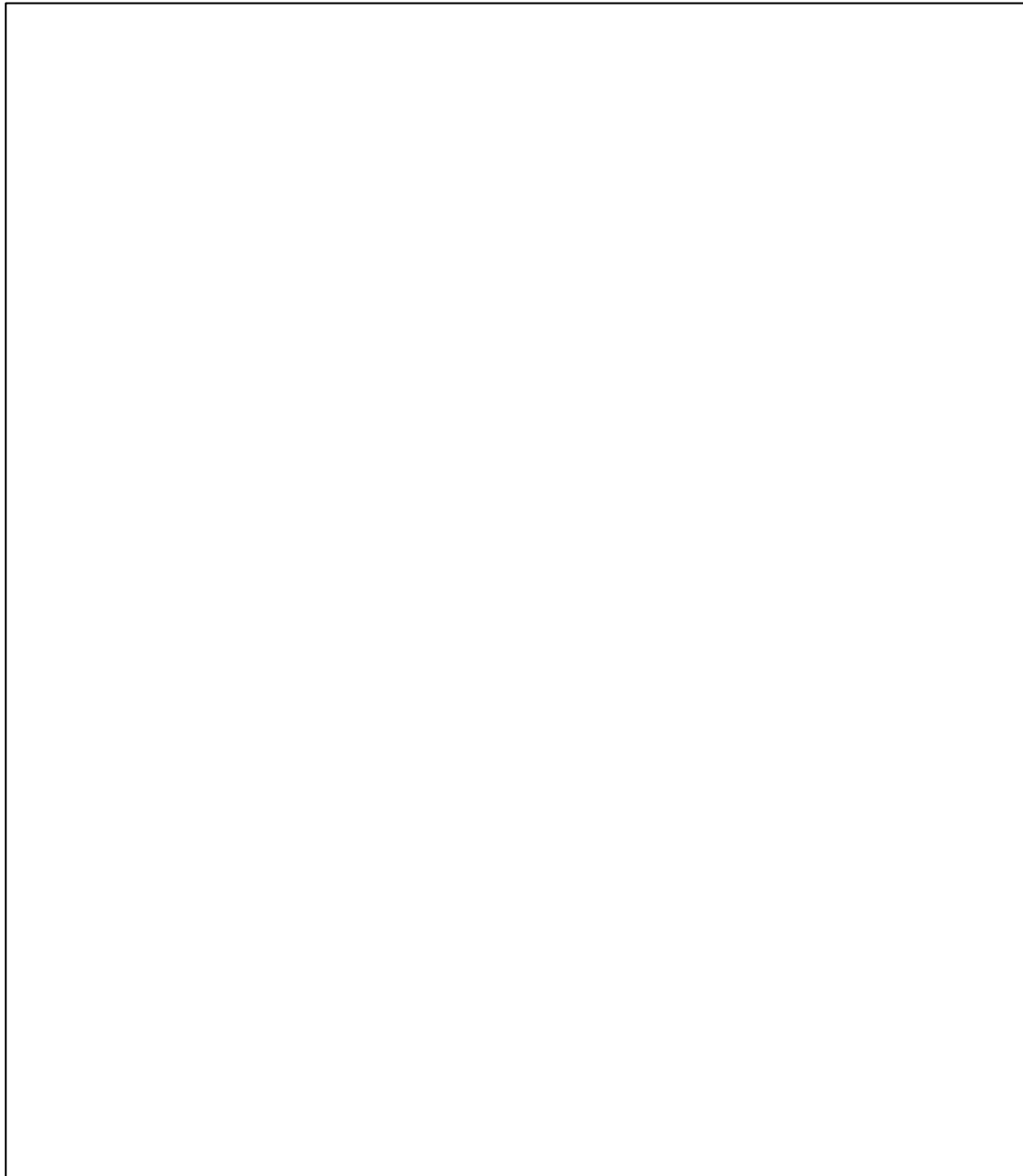
כמה עצים מתויגים בני  $n$  קדקודים ישנם בהם קבוצת העלים היא **בדיוק**  $\{1, \dots, k\}$ ?  
(הערה: ניתן לרשום את התשובה הסופית כסכום.)

מס' נבחן: \_\_\_\_\_

סעיף ב (13 נק')

זורקים "קובייה" בעלת ארבע פאות (הממוספרות 1,2,3,4) פעמים. יהי  $X$  סכום התוצאות שמתקבלות. הראו ש-  $Prob(X \geq 35) \leq 1/8$ .

(מרקוב:  $Prob(f \geq \lambda \cdot E[f]) \leq 1/\lambda$  צ'בישב:  $Prob(|f - E[f]| \geq C) \leq Var[f]/C^2$ )



**בהצלחה !**