מס' נבחן:_______________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א סמסטר אביב	ד"ר סטוארט סמית, נמרוד קריגר
5.2.2015 9:00	יונתן אלכסנדר, אוהד טרבלסי
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

שאלה	**1**		**2**		**3**		**4**		**5**	
ציון										

סה"כ	

מס' נבחן:_______________

שאלה 1

סעיף א (13 נק')

הוכיחו את משפט Ore:

יהי G גרף לא מכוון על $n \geq 3$ קדקודים. אם $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ לכל זוג קדקודים u ו- v שאינם שכנים בגרף, אז יש ב- G מעגל המילטון.

הוכח בכיתה.

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

יהי $G = \langle V_1,\ V_2,\ E\ \rangle$ גרף דו-חלקי שבו $|V_1| = |V_2| = n$ ו- $|E| \geq n^2 - n + 1$. הוכיחו שקיים זיווג מושלם ב- G.

דרך I: נשים לב קודם כל ש- G תת-גרף של $K_{n,n}$, ויש לכל היותר $n-1$ צלעות של $K_{n,n}$ שאינן שייכות ל- G.

תהי $S \subseteq V_1$ תת-קבוצה כלשהי של V_1 כך ש- $S \neq \emptyset$. ממשפט Hall מספיק להראות ש- $|\Gamma(S)| \geq |S|$. נסמן $|S| = k \geq 1$ ונניח בשלילה כי $|\Gamma(S)| < |S|$. אז $|\Gamma(S)| \leq k-1$ ולכן $|V_2 \setminus \Gamma(S)| \geq n-k+1$. בגרף G אין צלעות בין קדקודי S לבין קדקודי $V_2 \setminus \Gamma(S)$, כלומר מספר הצלעות של $K_{n,n}$ שאינן שייכות ל- G הוא לפחות

$$|S| \cdot |V_2 \setminus \Gamma(S)| \geq k(n-k+1) = nk - k(k-1) \geq nk - n(k-1) = n$$

ולכן $|E| \leq n^2 - n$ בסתירה לנתון.

דרך II: אפשר להוכיח את הטענה גם באמצעות אינדוקציה על n ללא שימוש במשפט Hall.

<u>עבור $n = 1$</u> : נקבל $|V_1| = |V_2| = 1$ ו- $|E| \geq 1^2 - 1 + 1 = 1$, לכן G הוא גרף על 2 קדקודים שמחוברים ע"י צלע. אזי יש זיווג מושלם ב- G.

<u>נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח אותה עבור $n+1$</u>: אז יהי $G = \langle V_1,\ V_2,\ E\ \rangle$ גרף דו-חלקי שבו $|V_1| = |V_2| = n+1$ ו- $|E| \geq (n+1)^2 - (n+1) + 1$, כלומר

$$|E| \geq n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1\ .$$

נשים לב שאין קודקוד בודד ב- G, משום שאם יש קודקוד כזה אז G תת-גרף של $K_{n,n+1}$ ולכן $|E| \leq n(n+1) = n^2 + n$ בסתירה להנחה. אז $\deg(u) \geq 1$ לכל קודקוד u ב- G. כמו כן, אפשר להניח שיש לפחות קודקוד אחד ב- V_1 מדרגה קטנה מ- $n+1$, אחרת $G \cong K_{n+1,n+1}$ ובמקרה זה ברור שיש זיווג מושלם. (כמובן נניח גם שיש לפחות קודקוד אחד ב- V_2 מדרגה קטנה מ- $n+1$.)

אז יהי u קודקוד ב- V_1 כך ש- $\deg(u) \leq n$ ויהי v שכן שלו ב- V_2. תהי $G' = G \setminus \{u, v\}$ הגרף המתקבל מ- G ע"י השמטת הקדקודים u ו- v וכל הצלעות החלות בהם. אז

$$G' = \langle V_1 \setminus \{u\}, V_2 \setminus \{v\}, E'\ \rangle$$

הוא גרף דו-חלקי שבו $|V_1 \setminus \{u\}| = |V_2 \setminus \{v\}| = n$. בנוסף, מספר הצלעות שהורדנו מ- G הוא לכל היותר $2n$ (שהן n צלעות לכל היותר שחלות ב- u, ו- n צלעות לכל היותר שחלות ב- v ושונות מהצלע בין u ל- v שכבר ספרנו). לכן

$$|E'| \geq |E| - 2n \geq (n^2 + n + 1) - 2n = n^2 - n + 1$$

מהנחת האינדוקציה נובע שקיים זיווג מושלם ב- G'. בגרף G נוסיף לזיווג הזה את הצלע בין u ל- v ונקבל זיווג מושלם ב- G. זה מסיים את האינדוקציה.

מס' נבחן:________________

שאלה 2

סעיף א (12 נק')

גרף לא מכוון $G = \langle V, E \rangle$ על n הקדקודים $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ נקרא "גרף צלחתי" אם יש ב- G מעגל אוילר ו- $\deg v < 4$ לכל קודקוד v של G.

1. מהו מספר הגרפים הצלחתיים על n קדקודים כאשר $n \geq 3$? (כאן הקדקודים מובחנים.)

בגרף אוילרי מעגלי כל הדרגות זוגיות ולכן הדרגה של כל קודקוד בגרף המדובר היא 2. G גם קשיר משום שיש בו מעגל אוילר, לכן הוא הגרף C_n, מעגל על n קדקודים. אז מספר הגרפים הוא כמספר הסידורים השונים של n קדקודים במעגל: $(n-1)!$.

2. גרף לא מכוון $G = \langle V, E \rangle$ על n הקדקודים $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ נקרא "משלים צלחתי" אם הגרף המשלים שלו הוא גרף צלחתי. הוכיחו שאם G גרף משלים צלחתי על n קדקודים כאשר n אי-זוגי ו- $n \geq 5$, אז יש ב- G מעגל אוילר.

יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף משלים צלחתי שבו $|V| = n \geq 5$ ו- n אי-זוגי. כדי להראות שיש מעגל אוילר ב- G, מספיק לפי משפט אוילר להוכיח כי G קשיר ודרגות כל הקדקודים של G זוגיות.

דרגות הקדקודים: גרף המשלים $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$ הוא צלחתי, לכן $\deg_{\bar{G}}(u) = 2$ לכל קודקוד u. אז $\deg_G(u) = (n-1) - 2 = n - 3$ שהיא מספר זוגי חיובי לכל קודקוד u.

קשירות: יהיו u ו- v שני קדקודים של G. אם $\{u, v\} \notin \bar{E}$ אז $\{u, v\} \in E$ ולכן u קשור ל- v. אם $\{u, v\} \in \bar{E}$ אז יש ל- u עוד שכן אחד בלבד ב- $\bar{G}$ משום ש- $\deg_{\bar{G}}(u) = 2$. באופן דומה יש ל- v עוד שכן אחד בלבד ב- $\bar{G}$. הנחנו ש- $|V| = n \geq 5$, לכן קיים קודקוד w כך ש- $\{u, w\} \notin \bar{E}$ וגם $\{w, v\} \notin \bar{E}$. אזי $\{u, w\} \in E$ וגם $\{w, v\} \in E$, ולכן u קשור ל- v.

סעיף ב (13 נק')

חשבו את מספר הדרכים לחלק r כדורים מובחנים ל- 3 תאים מובחנים כך שבכל תא יהיו לפחות 2 כדורים.

ברור שאם $r<6$ אז מספר הפתרונות הוא 0, לכן נניח ש- $r \geq 6$. (בעצם ההוכחה הבאה תקפה לכל $r \geq 4$.)

נסמן ב- a_1 את התנאי שבתא הראשון יש כדור אחד לכל היותר,
ב- a_2 את התנאי שבתא השני יש כדור אחד לכל היותר,
וב- a_3 את התנאי שבתא השלישי יש כדור אחד לכל היותר.

אז התשובה היא $e_0=\sum_{j=0}^{3}(-1)^j s_j$. ברור ש- $s_0=3^r$, מספר הדרכים לחלק r הכדורים לשלושת התאים.

לכל i כך ש- $1\leq i\leq 3$, $N(a_i)=2^r+r2^{r-1}$, כלומר מספר הדרכים לחלק את הכדורים כך שהתא ה- i הוא ריק ועוד מספר הדרכים לבחור בכדור אחד להכניס לתא ה-i ולחלק את שאר הכדורים בין שני התאים הנשארים. לכן

$$s_1=\sum_{i=1}^{3}N(a_i)=3\left(2^r+r2^{r-1}\right).$$

לכל $1\leq i<j\leq 3$, $N(a_ia_j)=1^r+r\cdot 1^{r-1}+r\cdot 1^{r-1}+r(r-1)\cdot 1^{r-2}$,

כלומר הסכום של מספר הדרכים לחלק את הכדורים כך שהתאים i ו- j ריקים, מספר הדרכים להשאיר את התא ה- i ריק ולבחור בכדור אחד להכניס לתא ה- j ולשים את שאר הכדורים בתא השלישי, אותו דבר כאשר נחליף את i ואת j, ומספר הדרכים לבחור בכדור אחד להכניס לתא ה- i ובכדור שני להכניס לתא ה- j ולשים את שאר הכדורים בתא השלישי. לכן

$$s_2=N(a_1a_2)+N(a_1a_3)+N(a_2a_3)=3+6r+3r(r-1).$$

לבסוף,
$$s_3=N(a_1a_2a_3)=0$$

מפני ש- $r\geq 4$. אז

$$e_0=\sum_{j=0}^{3}(-1)^j s_j=3^r-3\left(2^r+r2^{r-1}\right)+3+6r+3r(r-1)$$

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א (12 נק')</u>

יהי a_n מספר הסדרות מאורך n של איברים מהקבוצה $\{0,\ 1,\ 2\}$ כך שאין מופע של הספרה 2 מיד לפני או אחרי מופע של הספרה 0. (במילים אחרות, התבניות 02 ו- 20 אינן מופיעות בסדרה.) מצאו נוסחת נסיגה או מערכת של נוסחאות נסיגה שיאפשרו לכם לחשב את a_n, ומצאו ביטוי מפורש עבור a_n.

2. נסמן ב- b_n את מספר הסדרות התקינות באורך n שמסתיימות ב- 0,
נסמן ב- c_n את מספר הסדרות התקינות באורך n שמסתיימות ב- 1,
ונסמן ב- d_n את מספר הסדרות התקינות באורך n שמסתיימות ב- 2.
אז $a_n = b_n + c_n + d_n$, ונקבל את המערכת הבאה לכל $n \geq 2$:

$$b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$
$$c_n = b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}$$
$$d_n = c_{n-1} + d_{n-1},$$

כאשר $b_1 = c_1 = d_1 = 1$. מתנאי השפה ומהנוסחה הראשונה והנוסחה השלישית במערכת נובע ש- $b_n = d_n$ לכל $n \geq 1$. (אפשר גם להוכיח את זה באינדוקציה על n.)
אז אפשר לחלץ את d_n מהמערכת, ולרשום אותה בצורה הבאה:
לכל $n \geq 2$,

(1) $b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$

(2) $c_n = 2b_{n-1} + c_{n-1}.$

כאשר $b_1 = c_1 = 1$ ו- $a_n = 2b_n + c_n$ לכל $n \geq 1$.

מ- (1) נובע שלכל $n \geq 2$

(3) $c_{n-1} = b_n - b_{n-1}.$

כלומר לכל $n \geq 1$,

(4) $c_n = b_{n+1} - b_n$

נציב את (3) ואת (4) ב- (2) ונקבל שלכל $n \geq 2$,

(5) $b_{n+1} - 2b_n - b_{n-1} = 0$

הפולינום האופייני הוא $x^2 - 2x - 1$, והשורשים שלו הם

(6) $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$

לכן הפתרון הכללי ל- (5) הוא

(7) $b_n = A\left(1+\sqrt{2}\right)^n + B\left(1-\sqrt{2}\right)^n$

כאשר $b_1 = 1$ ו- $b_2 = 2$. אם נציב $n = 1$ ואת תנאי השפה האלה ב- (5), נקבל $b_0 = 0$. נציב $b_0 = 0$ ב- (7):

(8) $b_0 = 0 = A + B$

ולכן

(9) $B = -A.$

נציב את $b_1 = 1$ ואת (9) ב- (7):

(10) $b_1 = 1 = A\left(1+\sqrt{2}\right) + -A\left(1-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}A$

מ- (9) ו- (10) נובע ש-

(11) $A = \frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$

נציב ב- (7) ונקבל

(12) $b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$

ולכן מ- (4) נובע ש-

(13) $c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)\right]$

ואז

$$a_n = 2b_n + c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)\right]$$

מס' נבחן:________________

<u>סעיף ב (13 נק')</u>

יהי k מספר טבעי כך ש- $k > 1$. עץ T נקרא **k- רגולרי** אם דרגת כל קודקוד של T היא או k או 1.

1. חשבו את מספר העלים (כלומר קדקודים מדרגה 1) בעץ k- רגולרי על n קדקודים (כביטוי שתלוי ב- k ו- n).

נסמן ב- l את מספר העלים של העץ T. אז יש l קדקודים מדרגה 1 ויש $n-l$ קדקודים מדרגה k. סכום הדרגות שווה 2 כפול מספר הצלעות, ומכיוון ש- T הוא עץ על n קדקודים אז יש לו $n-1$ צלעות. קיבלנו את המשוואה

$l \cdot 1 + (n-l)k = 2(n-1)$, ולכן $l = \dfrac{n(k-2)+2}{k-1}$.

2. חשבו את מספר העצים המתויגים ה- 5- רגולריים על 22 הקדקודים $\{1, 2, 3, \cdots, 22\}$.

קודם כל, יש $\binom{22}{5}$ דרכים שונים לבחור ב- 5 הקדקודים שלא יהיו עלים. לכל בחירה כזאת, $\{i, j, k, l, m\}$ קוד הפריפר של העץ יהיה באורך 20 ויכיל כל אחד מהמספרים מ- $\{i, j, k, l, m\}$ בדיוק 4 פעמים. מספר הסדרות האלה הוא $\dfrac{20!}{4!4!4!4!4!}$ ולכן התשובה היא

$\binom{22}{5} \cdot \dfrac{20!}{(4!)^5}$.

שאלה 4

סעיף א (13 נק')

יהי G גרף המעגל הפשוט C_6 על 6 קדקודים. נצבע כל קודקוד של C_6 באופן אקראי באחד מהצבעים כחול, אדום, או ירוק. מהי ההסתברות שהתוצאה תהיה 3- צביעה תקינה של C_6 אם נתון שלפחות 3 קדקודים קיבלו את צבע הכחול? (תזכורת: ב- k- צביעה של גרף מספר הצבעים המופיעים הוא לכל היותר k.)

נתייחס ל- C_6 כגרף מתוייג על הקדקודים $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

יהי $\langle \Omega, \Pr \rangle$ מרחב ההסתברות הבדיד המתאים, שבו Ω קבוצת כל הדרכים לצבוע את הקדקודים של C_6 בשלושת הצבעים הנתונים, כאשר קדקודים שכנים יכולים לקבל אותו הצבע ו- Pr התפלגות אחידה. אז $|\Omega| = 3^6 = 729$ ולכן $Pr(\omega) = \frac{1}{729}$ לכל $\omega \in \Omega$.

יהי A המאורע שצביעה של קדקודי C_6 היא תקינה, כלומר 3- צביעה, ויהי B המאורע שלפחות 3 קדקודים קיבלו את צבע הכחול. עלינו לחשב את ההסתברות המותנה

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

נחשב קודם כל את $|B|$. לכל i כך ש- $3 \le i \le 6$ נגדיר מאורע B_i שבדיוק i קדקודים קיבלו את צבע הכחול. אז

$$|B_3| = \binom{6}{3} \cdot 2^3 = 160$$

$$|B_4| = \binom{6}{4} \cdot 2^2 = 60$$

$$|B_5| = \binom{6}{5} \cdot 2 = 12$$

$$|B_6| = \binom{6}{6} = 1$$

אז $|B| = |B_3| + |B_4| + |B_5| + |B_6| = 233$.

כעת נחשב את $|A \cap B|$. כדי ש- 3- צביעה של C_6 תכיל לפחות 3 קדקודים כחולים, חייבים להיות בדיוק 3 קדקודים כחולים. יש 2 אפשרויות עבורם: הקדקודים 1, 3, ו- 5, או הקדקודים 2, 4, ו- 6. לכל אחת מהאפשרויות האלה יש 2^3 דרכים לצבוע את שאר הקדקודים. לכן

$$|A \cap B| = 2 \cdot 2^3 = 16$$

אז

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\left(\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}\right)}{\left(\frac{|B|}{|\Omega|}\right)} = \frac{2 \cdot 2^3}{\binom{6}{3} \cdot 2^3 + \binom{6}{4} \cdot 2^2 + \binom{6}{5} \cdot 2 + \binom{6}{6}} = \frac{16}{233}$$

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

נתונות קבוצה $\{m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n\}$ של n גברים וקבוצה $\{w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n\}$ של n נשים, יחד עם ההנחות הקשורות לבעיית השידוכים היציבים.

1. הראו שכאשר $n = 2$, בכל שידוך יציב יש לפחות 2 אנשים שקיבלו את העדפתם הראשונה.

נתון שידוך יציב, נניח בשלילה שיש לכל היותר גבר אחד או אישה אחת שקיבלו את העדפתם הראשונה. אז יש לפחות 3 אנשים שלא קיבלו את העדפתם הראשונה. ביניהם יש גבר ואישה שאינם נשואים זה לזו, ולכן הם מעדיפים זה את זו מעל בני הזוג שלהם. במילים אחרות הם מהווים זוג חוסם, בסתירה להנחה שהשידוך היה יציב.

2. יהי $n = 3$ ויהי $\{m_1, w_1\}, \{m_2, w_2\}, \{m_3, w_3\}$ שידוך יציב שבו אף אחד לא קיבל את העדפתו הראשונה, לא גבר ולא אישה. נניח גם ש- m_1 מעדיף את w_2 מעל אישתו w_1. הראו שהעובדות האלה קובעות את רשימות ההעדפות של כל הגברים וכל הנשים.

נתון חלק מהדירוג של m_1 (כאשר הדירוג יורד משמאל ימין): $m_1 : \; w_2 , \; w_1$

כדי ש- $\{m_1, w_2\}$ לא יהיו זוג חוסם, צריך להיות ש- w_2 מעדיפה את בעלה m_2 מעל m_1. מצד שני, נתון ש- m_2 אינו הבחירה הראשונה שלה, ולכן היא מעדיפה את m_3 מעל m_2. אזי w_2 מדרגת את הגברים בסדר הבא:

$w_2 : \; m_3 , m_2 , m_1$

באופן דומה, כדי ש- $\{m_3, w_2\}$ לא יהיו זוג חוסם, צריך להיות ש- m_3 מעדיף את אישתו w_3 מעל w_2. מצד שני, נתון ש- w_3 אינה הבחירה הראשונה שלו, ולכן הוא מעדיף את w_1 מעל w_3. אזי m_3 מדרג את הנשים בסדר הבא:

$m_3 : \; w_1 , w_3 , w_2$

שיקולים דומים מובילים לדירוגים הבאים:

$w_1 : \; m_2 , m_1 , m_3$

$m_2 : \; w_3 , w_2 , w_1$

$w_3 : \; m_1 , m_3 , m_2$

וזה מאפשר לנו להשלים את רשימת כדירוגים של m_1:

$m_1 : \; w_2 , w_1 , w_3$

שימו לב שכל אחד ואחת התחתנו עם הבהירה השניה שלהם.

מס' נבחן:_______________

שאלה 5

סעיף א (13 נק')

יהי G גרף לא מכוון 3- רגולרי וקשיר על 8 קדקודים.

1. הוכיחו שיש ב- G מסלול המילטון.

יהי k האורך המקסימלי של מסלול שאינו מעגל ב- G. נוכיח ש- $k = 8$.

יהי $\langle v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k \rangle$ מסלול שאינו מעגל שאורכו הוא האורך המקסימלי k. כל השכנים של v_1 שייכים למסלול $\langle v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k \rangle$, משום שאם היה ל- v_1 שכן u שאינו שייך למסלול אז המסלול $\langle u, v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k \rangle$ היה מסלול שאינו מעגל שאורכו <u>גדול</u> מהאורך המקסימלי k, וזאת סתירה. באופן דומה, כל השכנים של v_k שייכים למסלול.

מקרה א': **v_1 ו- v_k שכנים:** אז גם לכל i כך ש- $2 \le i \le k-1$ מתקיים שכל השכנים של v_i שייכים למסלול $\langle v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k \rangle$, משום שאם היה ל- v_i שכן u שאינו שייך למסלול אז המסלול $\langle u, v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_k, v_1, v_2, \cdots, v_i \rangle$ היה מסלול שאינו מעגל שאורכו <u>גדול</u> מהאורך המקסימלי k, וזאת סתירה. אבל זה אומר שכל קדקודיו של G שייכים למסלול, כי G קשיר ואין קודקוד במסלול שקשור לקודקוד שאינו שייך למסלול. זאת אומרת ש- $k = 8$. (בנוסף זה אומר ש- $\langle v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k, v_1 \rangle$ מהווה <u>מעגל</u> המילטון, לא רק מסלול המילטון.)

מקרה ב': **v_1 ו- v_k אינם שכנים:** מה- 3 - רגולריות של G נובע שיש $k-2$ צלעות שאינן שייכות למסלול ושחלות בקדקודים בקבוצה $\{v_2, v_3, v_4, \cdots, v_{k-1}\}$. יש 2 מהן שבאות מ- v_1 ועוד 2 שבאות מ- v_k, ולכן $k - 2 \ge 4$. אז $k \ge 6$.

אם $k = 6$ אז בנוסף ל- 4 הצלעות מ- v_1 ומ- v_6, יש לפחות 4 צלעות שחלות בקדקודים בקבוצה $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ משני הקדקודים שלא שייכים למסלול, וזאת סתירה.

אם $k = 7$ אז בנוסף ל- 4 הצלעות מ- v_1 ומ- v_6, יש 3 צלעות שחלות בקדקודים בקבוצה $\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ מהקודקוד היחיד שלא שייך למסלול, וזאת שוב סתירה.

אז $k = 8$ ולכן $\langle v_1, v_2, v_3, \cdots, v_8 \rangle$ מסלול המילטון. בעצם אפשר להמשיך מכאן את ההוכחה במקרה ב' ולהראות שקיים **מעגל** המילטון ב- G. אם קיים i כך ש- $3 \le i \le 6$ שעבורו v_i שכן של v_8 ו- v_{i+1} שכן של v_1, אז $\langle v_1, v_2, \cdots, v_i, v_8, v_7, \cdots, v_{i+2}, v_{i+1}, v_1 \rangle$ מעגל המילטון. אם לא קיים i כזה אז השכנים של v_1 הם v_2, v_3, ו- v_4, והשכנים של v_8 הם v_5, v_6, ו- v_7. אז הצלע ה- 12 ב- G היא בין v_2 ל- v_7, ולכן $\langle v_1, v_2, v_7, v_8, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1 \rangle$ מעגל המילטון.

2. הוכיחו ש- G אינו בהכרח גרף מישורי. (כלומר מצאו דוגמא של גרף לא-מישורי 3- רגולרי וקשיר על 8 קדקודים.)

לפי משפט קורטובסקי, G אינו מישורי אם ורק אם יש לו תת-גרף הומאומורפי ל- K_5 או ל- $K_{3,3}$. אבל אין ל- G קדקודים מדרגה 4, לכן אין לו תת-גרף הומאומורפי ל- K_5. אז כדי לבנות דוגמא של גרף G לא-מישורי 3- רגולרי וקשיר, נתחיל בגרף $K_{3,3}$. נבחר ב- 2 מהצלעות ונחליף כל אחת מהן בשתי שאלות שמחוברות ע"י קודקוד מדרגה 2. לבסוף נוסיף צלע שמחברת בין שתי הצלעות מדרגה 2, והתוצאה תהיה הדוגמא הנדרשת.

סעיף ב (12 נק')

מטילים קובייה הוגנת n פעמים. נגדיר משתנה מקרי f באופן הבא: אם סדרת תוצאת ההטלות מסומנת ב- $\omega = \langle a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \rangle$ אז $f(\omega)$ שווה למספר האינדקסים i (כאשר $1 \le i \le n-1$) כך ש- $a_i + a_{i+1}$ מספר אי-זוגי.

1. חשבו את התוחלת ואת השונות של f.

לכל אינדקס i (כאשר $1 \le i \le n-1$) נגדיר אינדיקטור בדרך הבאה: לכל $\omega \in \Omega$ כך ש- $\omega = \langle a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \rangle$, נגדיר

$f_i(\omega) = 1$ אם $a_i + a_{i+1}$ מספר אי-זוגי, ו-
$f_i(\omega) = 0$ אם $a_i + a_{i+1}$ מספר זוגי.

אז $f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_{n-1}$ ו- $\mathrm{E}[f_i] = \Pr(f_i = 1) = \frac{1}{2}$ לכל $1 \le i \le n-1$.
לכן

$$\mathrm{E}[f] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}[f_i] = \frac{n-1}{2}$$

בנוסף, ה- f_i -ים בלתי-תלויים, משום שלכל $k, l \in \{0,1\}$ ולכל $1 \le i < j \le n-1$,

$$\Pr(f_i = k, f_j = l) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Pr(f_i = k) \cdot \Pr(f_j = l)$$

לכן $\mathrm{Var}[f] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Var}[f_i]$. מתקיים ש- $f_i^2 = f_i$ לכל i, ולכן

$$\mathrm{Var}[f_i] = \mathrm{E}[f_i^2] - (\mathrm{E}[f_i])^2 = \mathrm{E}[f_i] - (\mathrm{E}[f_i])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

אזי

$$\mathrm{Var}[f] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Var}[f_i] = \frac{n-1}{4}.$$

2. יהי $n = 1{,}000{,}001$. מהו חסם מלעיל עבור $\Pr(|f - E[f]| \ge 10{,}000)$ שמתקבל מאי-השוויון של צ'בישב?

נציב $C = 10{,}000$ באי-השוויון של צ'בישב $\Pr(|f - E[f]| \ge C) \le \frac{Var[f]}{C^2}$, יחד עם הערכים של $E[f]$ ו- $\mathrm{Var}[f]$ שמתאימים ל- $n = 1{,}000{,}001$. התוצאה היא

$$\Pr(|f - E[f]| \ge 10{,}000) \le \frac{250{,}000}{10{,}000^2} = \frac{250{,}000}{100{,}000{,}000} = 0.0025$$

בהצלחה !