

**אוניברסיטת בן-גוריון  
המחלקה למדעי המחשב**

ד"ר סטוארט סמית, נמרוד קריגר	<b>מבנים בדידים וקומבינטוריקה</b> 202-1-1061 מועד א סמסטר אביב
יונתן אלכסנדר, אוהד טרבלסי	5.2.2015 9:00
<b>אסור</b>	חומר עזר
שלוש שעות	משך הבחינה

**הנחיות חשובות:**

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

**בהצלחה !**

5	4	3	2	1	שאלה
					ציון

<b>סה"כ</b>	
-------------	--

שאלה 1

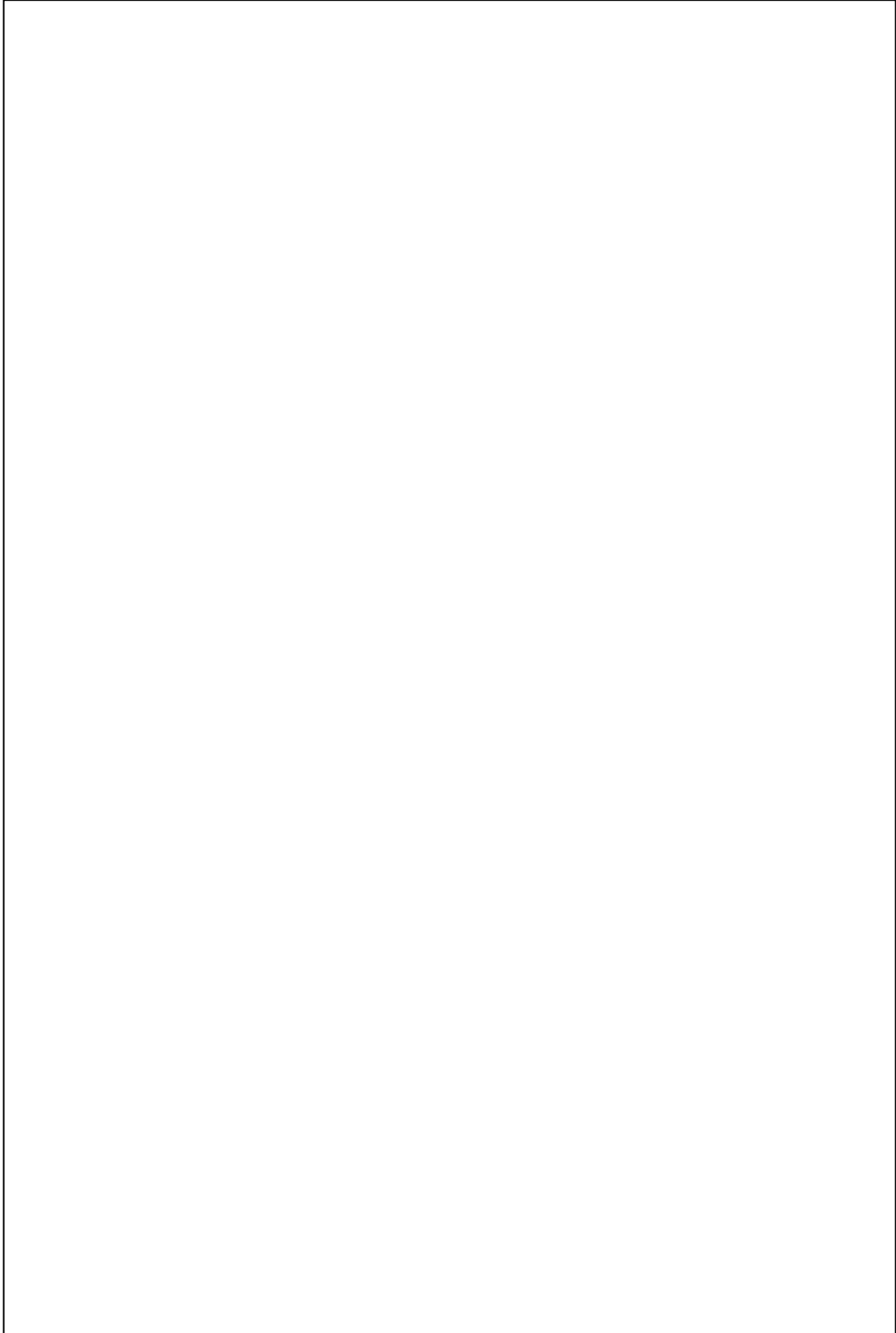
סעיף א (13 נק')

הוכיחו את משפט Ore:

יהי  $G$  גרף לא מכוון על  $n \geq 3$  קדקודים. אם  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$  לכל זוג קדקודים  $u, v$  שאינם שכנים בגרף, אז יש ב- $G$  מעגל המילטון.

סעיף ב (12 נק')

יהי  $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$  גרף דו-חלקי שבו  $|V_1| = |V_2| = n$  ו-  $|E| \geq n^2 - n + 1$ . הוכיחו שקיים זיווג מושלם ב-  $G$ .

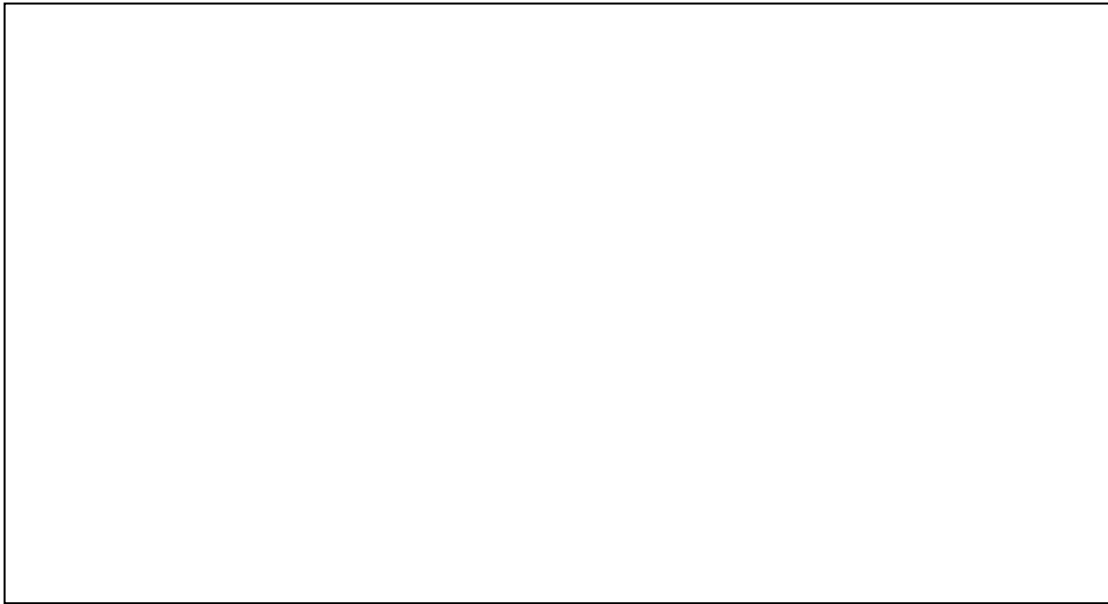


שאלה 2

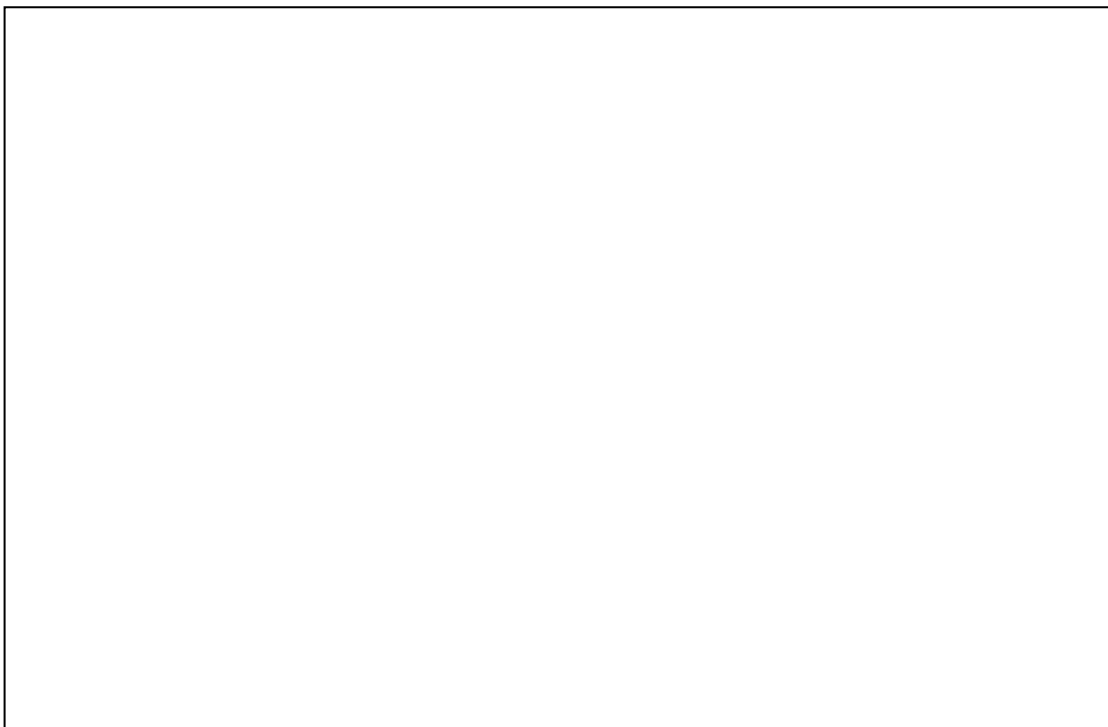
סעיף א (12 נק')

גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  על  $n$  הקדקודים  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  נקרא "גרף צלחתי" אם יש ב-  $G$  מעגל אוילר ו-  $\deg v < 4$  לכל קודקוד  $v$  של  $G$ .

1. מהו מספר הגרפים הצלחתיים על  $n$  קדקודים כאשר  $n \geq 3$ ? (כאן הקדקודים מובחנים).



2. גרף לא מכוון  $G = (V, E)$  על  $n$  הקדקודים  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  נקרא "משלים צלחתי" אם הגרף המשלים שלו הוא גרף צלחתי. הוכיחו שאם  $G$  גרף משלים צלחתי על  $n$  קדקודים כאשר  $n$  אי-זוגי ו-  $n \geq 5$ , אז יש ב-  $G$  מעגל אוילר.



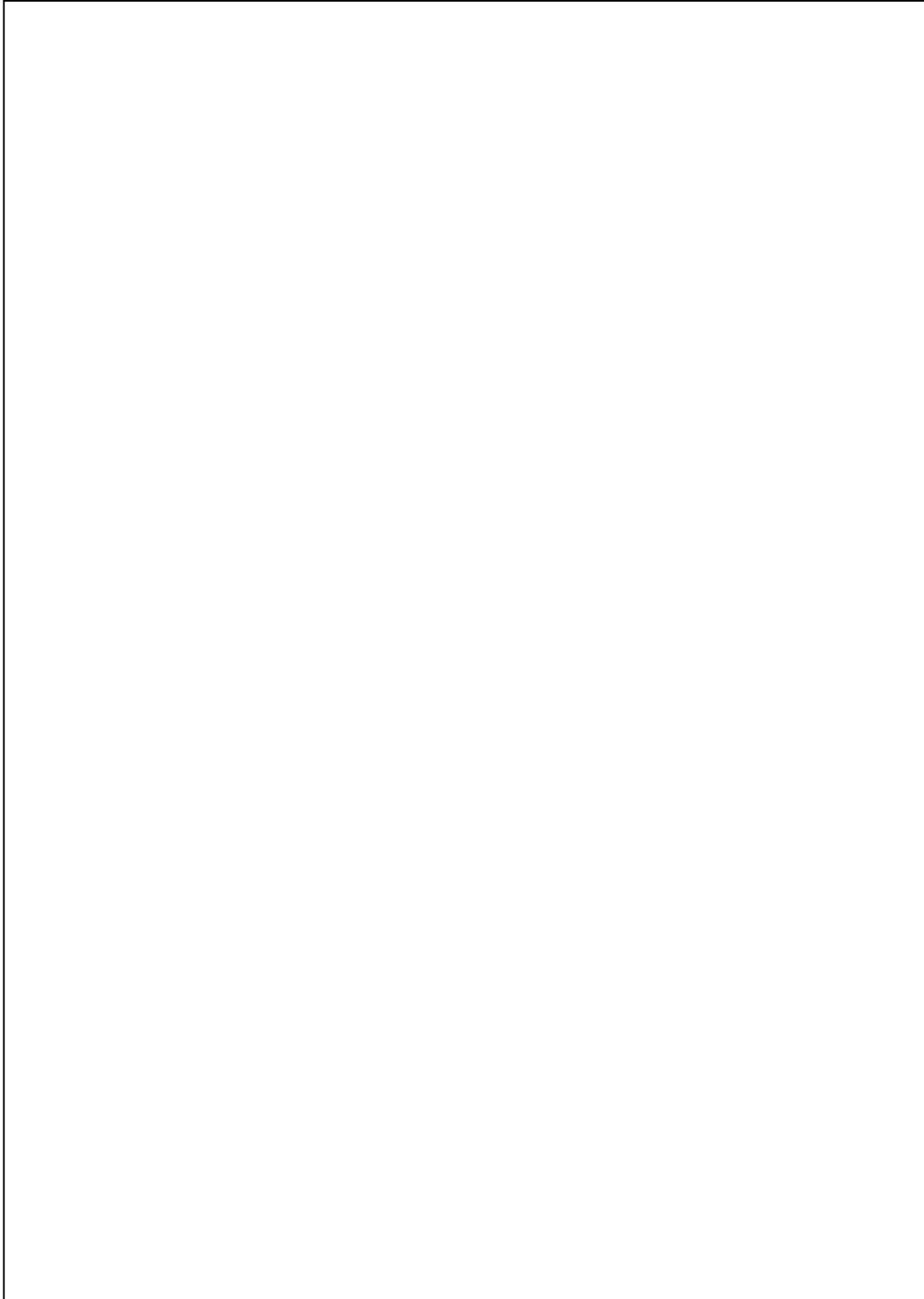
סעיף ב (13 נק')

חשבו את מספר הדרכים לחלק  $n$  כדורים מובחנים ל- 3 תאים מובחנים כך שבכל תא יהיו לפחות 2 כדורים.

שאלה 3

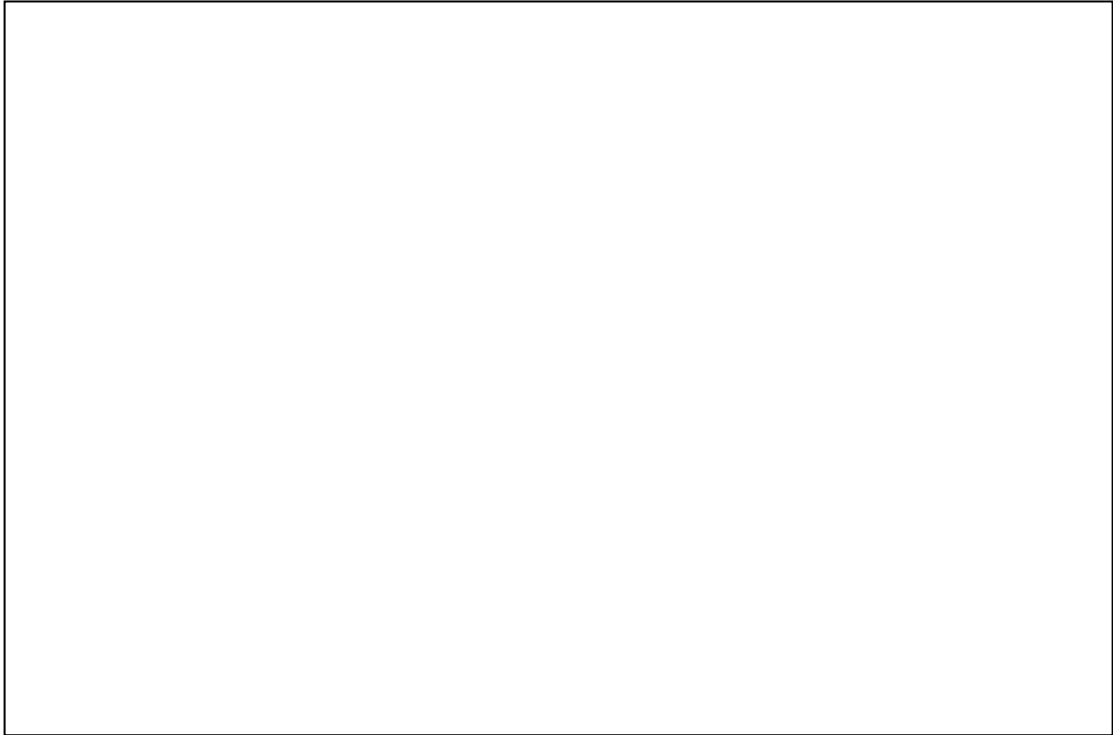
סעיף א (12 נק')

יהי  $a_n$  מספר הסדרות מאורך  $n$  של איברים מהקבוצה  $\{0, 1, 2\}$  כך שאין מופע של הספרה 2 מיד לפני או אחרי מופע של הספרה 0. (במילים אחרות, התבניות 02 ו-20 אינן מופיעות בסדרה.) מצאו נוסחת נסיגה או מערכת של נוסחאות נסיגה שיאפשרו לכם לחשב את  $a_n$ , ומצאו ביטוי מפורש עבור  $a_n$ .

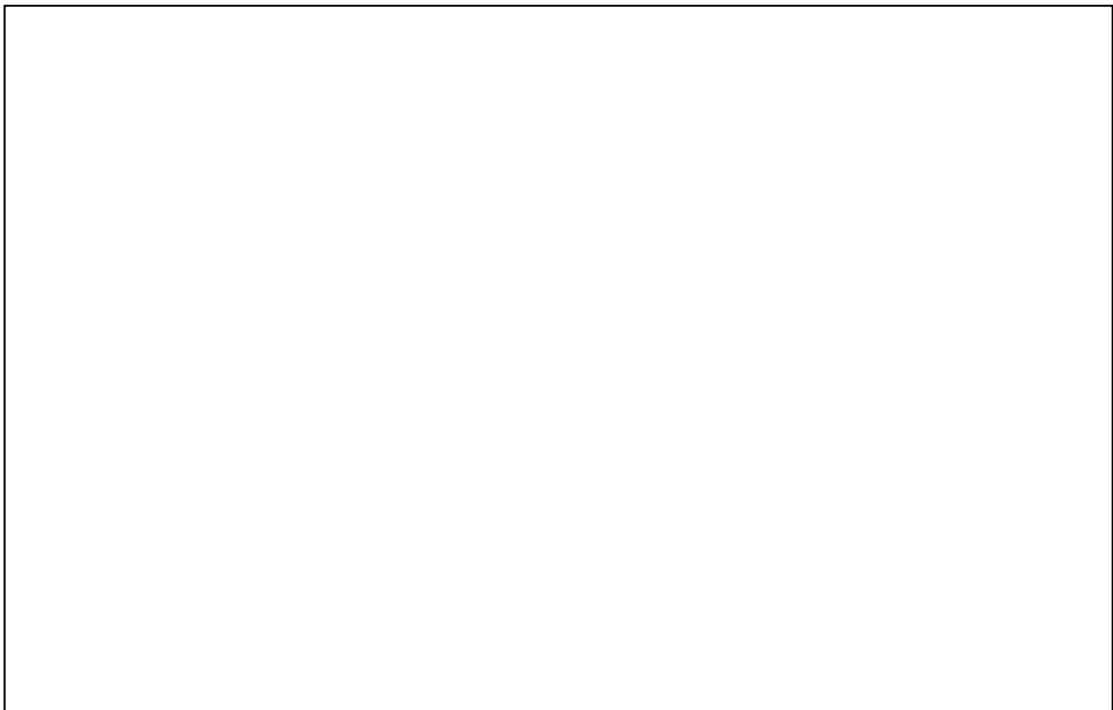


סעיף ב (13 נק')

- יהי  $k$  מספר טבעי כך ש-  $k > 1$ . עץ  $T$  נקרא  $k$ -רגולרי אם דרגת כל קודקוד של  $T$  היא או  $k$  או 1.
1. חשבו את מספר העלים (כלומר קדקודים מדרגה 1) בעץ  $k$ -רגולרי על  $n$  קדקודים (כביטוי שתלוי ב-  $k$  ו-  $n$ ).



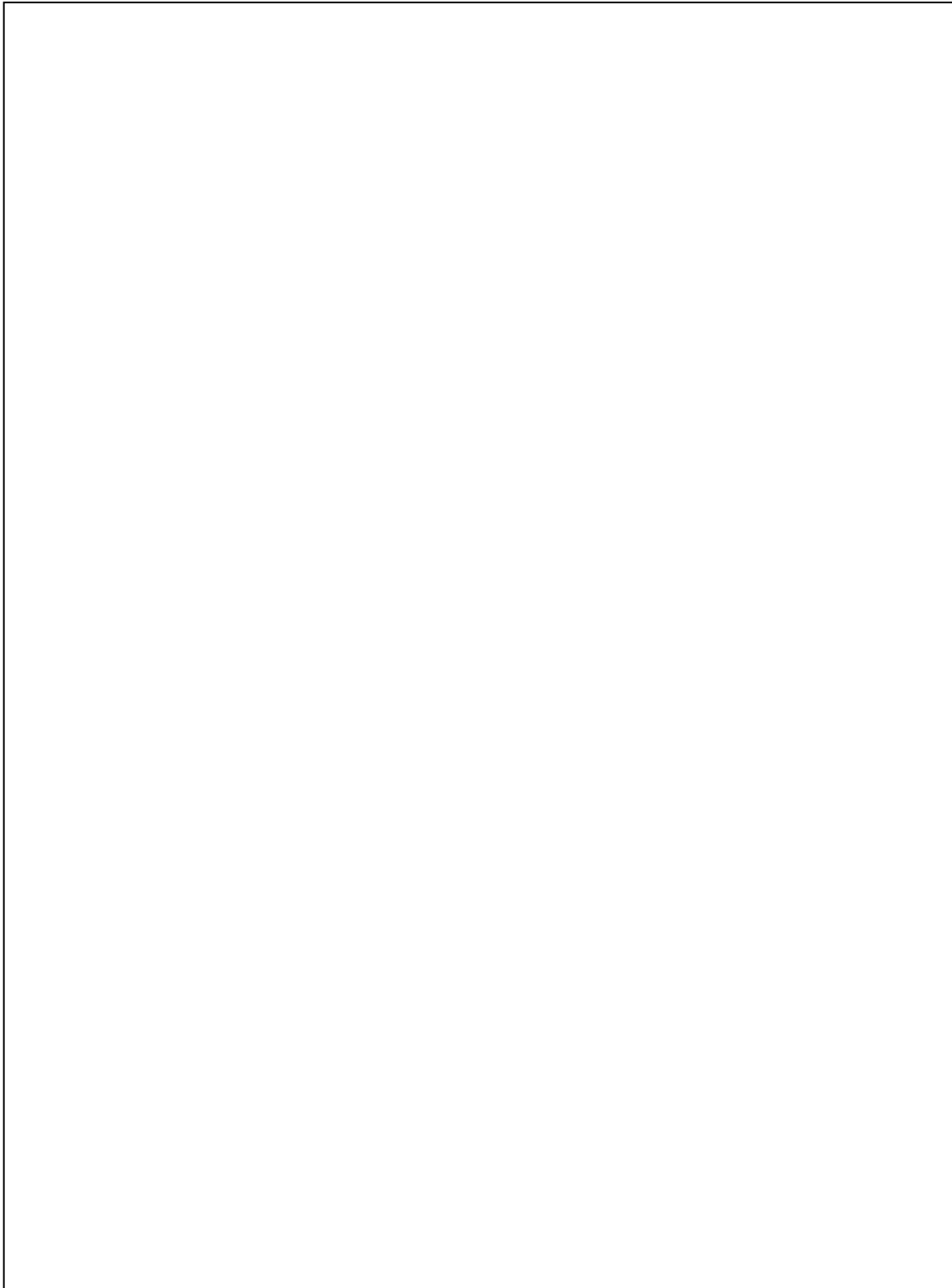
2. חשבו את מספר העצים המתויגים ה-5- רגולריים על 22 הקדקודים  $\{1, 2, 3, \dots, 22\}$ .



שאלה 4

סעיף א (13 נק')

יהי  $G$  גרף המעגל הפשוט  $C_6$  על 6 קדקודים. נצבע כל קודקוד של  $C_6$  באופן אקראי באחד מהצבעים כחול, אדום, או ירוק. מהי ההסתברות שהתוצאה תהיה 3- צביעה תקינה של  $C_6$  אם נתון שלפחות 3 קדקודים קיבלו את צבע הכחול? (תזכורת: ב-  $k$  צביעה של גרף מספר הצבעים המופיעים הוא לכל היותר  $k$ .)

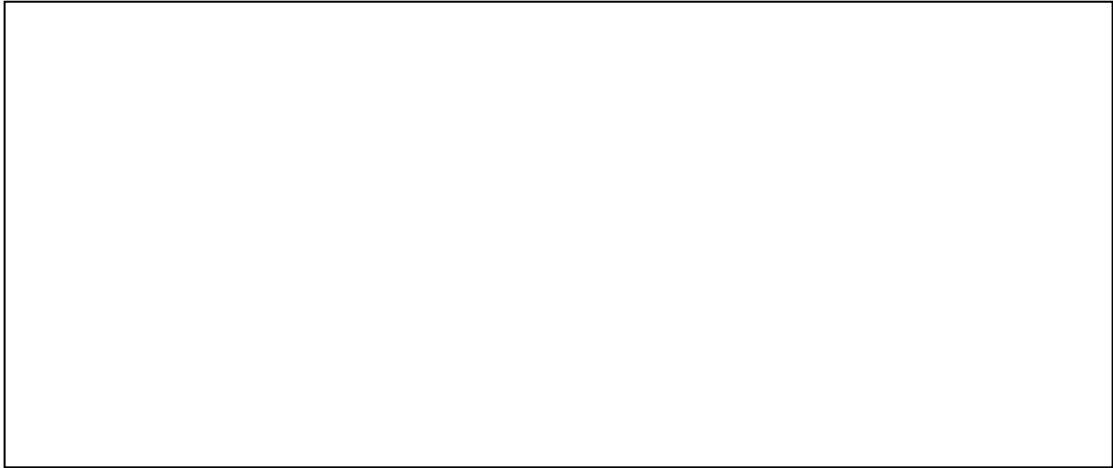




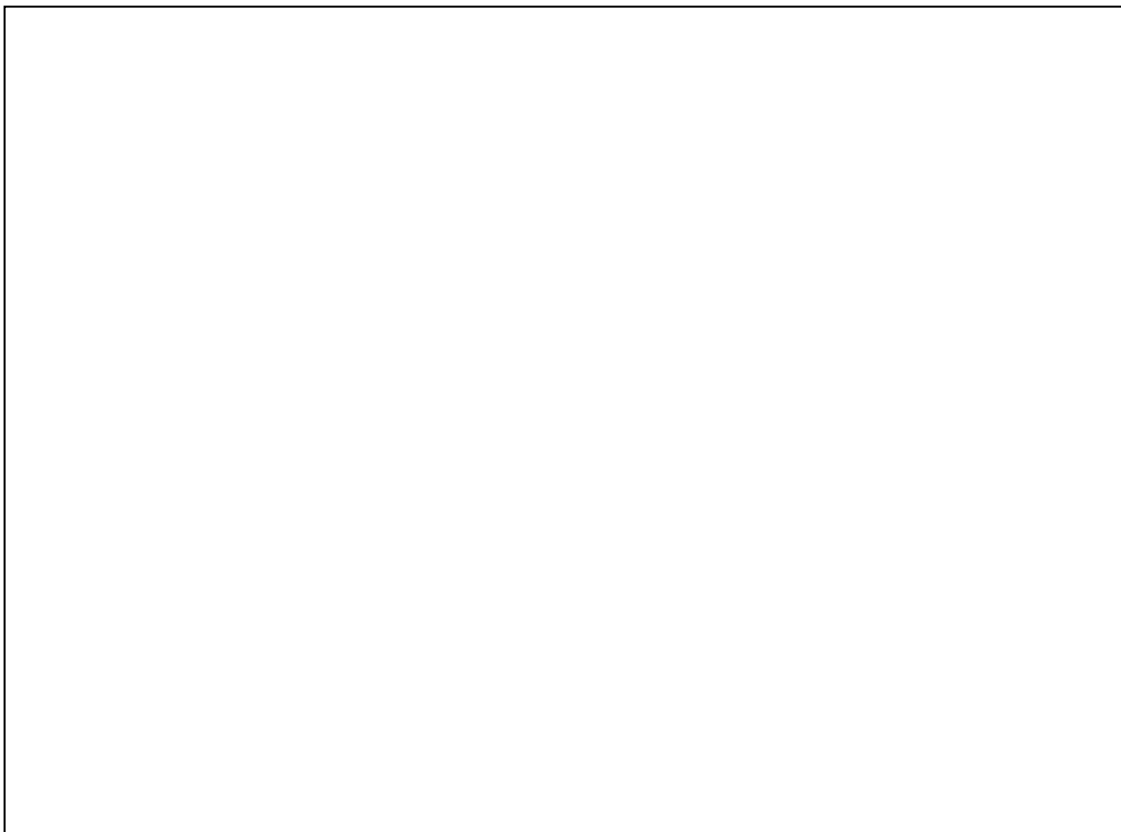
סעיף ב (12 נק')

נתונות קבוצה  $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$  של  $n$  גרבים וקבוצה  $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$  של  $n$  נשים, יחד עם ההנחות הקשורות לבעיית השידוכים היציבים.

1. הראו שכאשר  $n = 2$ , בכל שידוך יציב יש לפחות 2 אנשים שקיבלו את העדפתם הראשונה.



2. יהי  $n = 3$  ויהי  $\{m_1, w_1\}, \{m_2, w_2\}, \{m_3, w_3\}$  שידוך יציב שבו אף אחד לא קיבל את העדפתו הראשון, לא גבר ולא אישה. נניח גם ש-  $m_1$  מעדיף את  $w_2$  מעל אישתו  $w_1$ . הראו שהעובדות האלה קובעות את רשימות ההעדפות של כל הגברים וכל הנשים.



שאלה 5

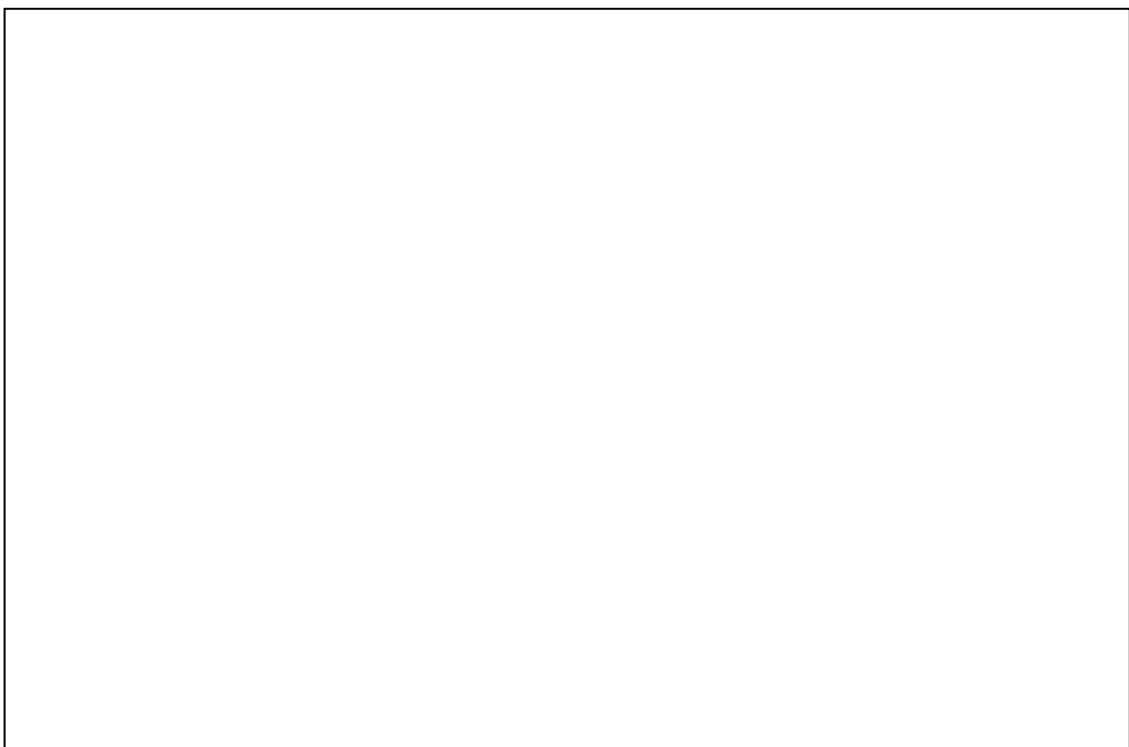
סעיף א (13 נק')

יהי  $G$  גרף לא מכוון 3- רגולרי וקשיר על 8 קדקודים.

1. הוכיחו שיש ב-  $G$  מסלול המילטון.



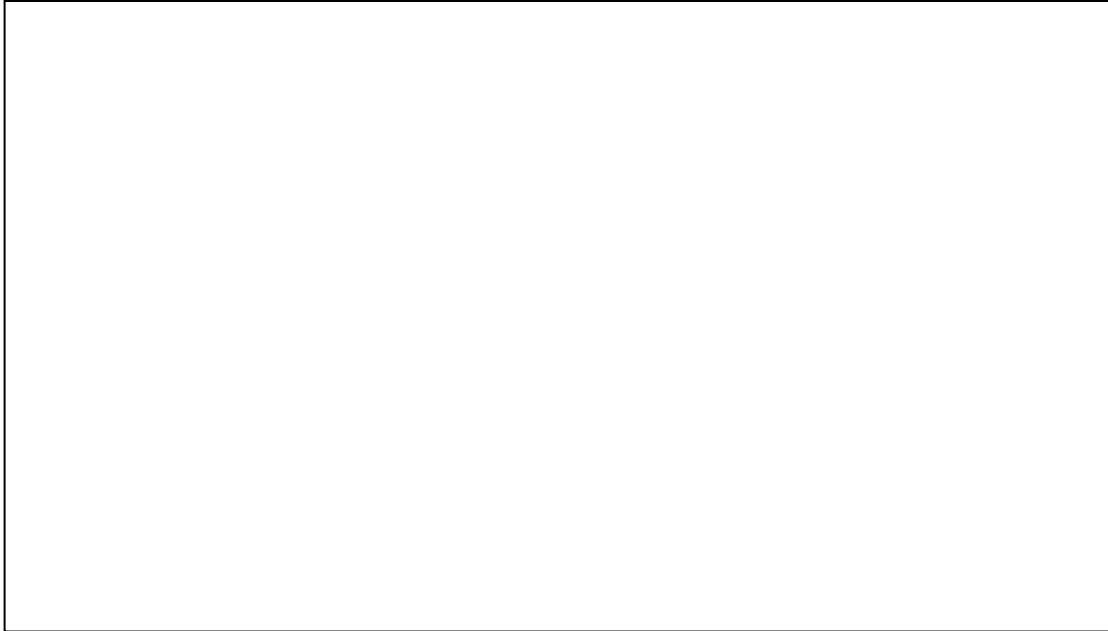
2. הוכיחו ש-  $G$  אינו בהכרח גרף מישורי. (כלומר מצאו דוגמא של גרף לא-מישורי 3- רגולרי וקשיר על 8 קדקודים.)



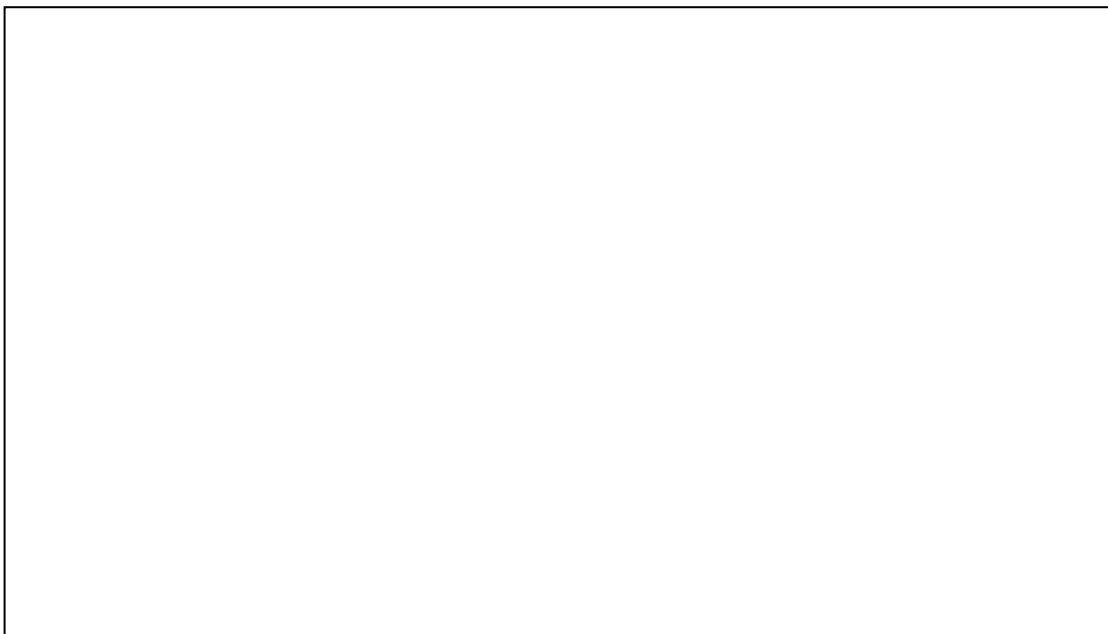
סעיף ב (12 נק')

מטילים קובייה הוגנת  $n$  פעמים. נגדיר משתנה מקרי  $f$  באופן הבא: אם סדרת תוצאות ההטלות מסומנת ב-  $\omega = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$  אז  $f(\omega)$  שווה למספר האינדקסים  $i$  (כאשר  $1 \leq i \leq n - 1$ ) כך ש-  $a_i + a_{i+1}$  מספר אי-זוגי.

1. חשבו את התוחלת ואת השונות של  $f$ .



2. יהי  $n = 1,000,001$ . מהו חסם מלעיל עבור  $\Pr(|f - E[f]| \geq 10,000)$  שמתקבל מאי-השוויון של צ'בישב?



**בהצלחה !**