אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

בוחן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר ניימן, ד"ר סטוארט סמית, גב' יעל שטיין
1.5.2014 17:00	יונתן אלכסנדר, טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שעתיים וחצי

<u>הנחיות חשובות:</u>

- הבוחן מורכב משני חלקים.

בחלק א' **<u>עליכם לענות על 2 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 3. משקלה של כל שאלה הוא 30 נקודות. בכל שאלה ישנם שני סעיפים עליהם נדרשת תשובה מפורטת ומנומקת.

בחלק ב' **<u>עליכם לענות על 4 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 10 נקודות. בחלק זה אין לכתוב נימוק באף שאלה.

- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו או לשאלה כלשהי, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף או השאלה.** אין לכתוב "לא יודעים" על חלק מסעיף.

- רצוי לפתור את הבוחן תחילה במחברת הטיוטה ולאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת הבוחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	**א1**		**א2**		**א3**		**ב1**	**ב2**	**ב3**	**ב4**	**ב5**
ציון											

<u>סה"כ</u>	

<u>חלק א:</u> ענו על 2 מתוך 3 השאלות הבאות. <u>נמקו</u> את תשובותיכם:

<u>שאלה א1 (30%)</u>

א. נתונה קבוצת המספרים $A = \{1,2,\dots,120\}$.
מהו מספר תתי הקבוצות של A שמקיימות את כל התנאים הבאים:
- קיים בדיוק מספר אחד בקבוצה שמתחלק ב- 2.
- קיים בדיוק מספר אחד בקבוצה שמתחלק ב- 3.
- קיים בדיוק מספר אחד בקבוצה שמתחלק ב- 23.
- כל מספר בקבוצה מתחלק בלפחות אחד מבין המספרים 2,3,23.

על מנת לעמוד בתנאים נשים לב שהתת-קבוצה יכולה להכיל 3 מספרים שכל מספר מתחלק אך ורק באחד מהמספרים $\{2,3,23\}$ או 2 מספרים שאחד מתחלק באחד מהם והשני ב2 הנותרים.

מקרה ראשון:

נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה בשביל למצוא את מספר המספרים שמתחלקים רק ב-1 מהמספרים

מספרים שמתחלקים ב-2: $A_2 = \left\lfloor\frac{120}{2}\right\rfloor = 60$

מספרים שמתחלקים ב-3: $A_3 = \left\lfloor\frac{120}{3}\right\rfloor = 40$

מספרים שמתחלקים ב-23: $A_{23} = \left\lfloor\frac{120}{23}\right\rfloor = 5$

מספרים שמתחלקים ב-2 ו-3: $A_6 = \left\lfloor\frac{120}{6}\right\rfloor = 20$

מספרים שמתחלקים ב-2 ו-23: $A_{46} = \left\lfloor\frac{120}{46}\right\rfloor = 2$

מספרים שמתחלקים ב-3 ו-23: $A_{69} = \left\lfloor\frac{120}{69}\right\rfloor = 1$

נספרים שמתחלקים ב-2, 3 ו-23: $A_{138} = \left\lfloor\frac{120}{138}\right\rfloor = 0$

מספרים שמתחלקים רק ב-2: $A_{2^*} = A_2 - A_6 - A_{46} + A_{138} = 60 - 20 - 2 + 0 = 38$

מספרים שמתחלקים רק ב-3: $A_{3^*} = A_3 - A_6 - A_{69} + A_{138} = 40 - 20 - 1 = 19$

מספרים שמתחלקים רק ב-23: $A_{23^*} = A_{23} - A_{46} - A_{69} + A_{138} = 5 - 2 - 1 + 0 = 2$

מספר הדרכים לבחור תת-קבוצה בגודל 3 שעומדת בתנאים הוא: $38 * 19 * 2 = 1444$

מקרה שני:

מספר אחד שמתחלק רק ב-2 ומספר שמתחלק ב-3 ו-23: $A_{2^*} * (A_{69} - A_{138}) = 38 * 1$

מספר אחד שמתחלק רק ב-3 ומספר שמתחלק ב-2 ו-23: $A_{3^*} * (A_{46} - A_{138}) = 19 * 2$

מספר אחד שמתחלק רק ב-23 ומספר שמתחלק ב-2 ו-3: $A_{23^*} * (A_6 - A_{138}) = 2 * 20$

תשובה סופית:

$$1444 + 38 + 38 + 40$$

ב. הוכח את הזהות הבאה בדרך קומבינטורית (הוכחה בדרך אחרת לא תתקבל):

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$$

<u>הבעיה המתאימה:</u> בכתות ה' ו-ו' יש n תלמידים בכל כיתה. אנו נדרשים לבחור קב' מבין שתי הכיתות בגודל n, המכילה גם יו"ר שהוא תלמיד כיתה ו'.

<u>אגף ימין:</u>

נבחר תחילה את היו"ר מבין תלמידי כיתה ו'. יש לכך n אפשרויות. מבין n-1 התלמידים הנותרים בכיתה ו', ו-n התלמידים הנותרים בכתה ה' נבחר את שאר n-1 חברי הקב'. בעצם עלינו לבחור n-1 תלמידים מבין 2n-1, ולכך יש $\binom{2n-1}{n-1}$ אפשרויות.

סה"כ יש $n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$ אפשרויות לבחירת הקב' עם היו"ר.

<u>אגף שמאל:</u>

נניח שעלינו לבחור k תלמידי כיתה ו' ו- n-k תלמידי כיתה ה' לקב'. (כמובן ש$1 \leq k \leq n$ כיוון שיש לפחות תלמיד אחד מכיתה ו' – היו"ר, ולכל היותר כל הקב' מורכבת מתלמידי כיתה ו'.) אז מספר האפשרויות לבחירת k תלמידי ו' לקב' היא $\binom{n}{k}$. מתוך k הנבחרים, נבחר את היו"ר: יש לכך k אפשרויות. כעת נותר לבחור את n-k תלמידי כיתה ה' לקב', את זאת נעשה ע"י בחירת n-(n-k) התלמידים שלא ייבחרו לקב'. יש לכך $\binom{n}{n-(n-k)} = \binom{n}{k}$ אפשרויות.

סה"כ: $k \cdot \binom{n}{k}^2$, אך כאמור, k יכול להיות כל מס' בין 1 ל-n ולכן עלינו לסכום את מס' האפשרויות עבור כל k. לכן נקבל:

$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2$ אפשרויות סה"כ לבחירת הקב' והיו"ר.

<u>שאלה א2 (30%)</u>

א. נתונה סדרה באורך n של מספרים טבעיים (כלומר שלמים חיוביים).
הוכיחו כי קיים תת רצף של הסדרה, שסכום המספרים בו מתחלק ב- n.
לדוגמא, בהינתן הסדרה (2,1,4,3,4,3), תת הרצף 1,4,3,4 נותן סכום $1+4+3+4=12$,
ו-12 אכן מתחלק ב: $n=6$.

נתבונן בסדרה באורך n של מספרים טבעיים.
עבור $1 \leq i \leq n$, נגדיר את x_i להיות סכום איברי תת הרצף מהאיבר הראשון ועד האיבר ה-i-י.
אם קיים $1 \leq i \leq n$ כך שx_i מתחלק ב-n ללא שארית, אזי תת הרצף מהאיבר הראשון ועד האיבר ה-i-י הוא תת רצף כנדרש.
אחרת, לכל x_i שארית חלוקה ב-n בין 1 ל-$n-1$.
מעקרון שובך היונים, קיימים $1 \leq i < j \leq n$ כך של- x_i ו- x_j שאריות זהות בחלוקה ב-n.
מכאן שסכום איברי תת הרצף מהאיבר ה-$i+1$ ועד האיבר ה-j שהינו $x_j - x_i$ מתחלק ב-n ללא שארית.

ב. פתרו את נוסחת הנסיגה:

$$a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$$
$$a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 5$$

המשוואה האופיינית היא: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$.
שורשי המשוואה הם: 1 בריבוי 2, ו- 2 בריבוי 1.
לכן הפתרון המבוקש הינו מהצורה: $a_n = A1^n + Bn1^n + C2^n$.
נמצא את המקדמים A, B, C בעזרת תנאיי ההתחלה.

$$1 = a_0 = A + C$$
$$4 = a_1 = A + B + 2C$$
$$5 = a_2 = A + 2B + 4C$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל: $A = 3, B = 5, C = -2$. לכן, פתרון הנוסחה הוא:
$$3 + 5n - 2^{n+1}$$

<u>שאלה 3א (30%)</u>

א. תהי $A=\{1,2,3\ldots.83,84\}$. בכמה דרכים ניתן לבחור תת-קבוצה $B\subseteq A$ כך ש- $|B|=42$ ולכל $b\in B$ יש מחלק משותף עם 84 שהוא גדול מ-1 ?

תהי $C\subseteq A$ קבוצת כל האיברים של A שיש להם גורם משותף עם 84 שהוא גדול מ- 1. אז המשלים של C, כלומר $A\setminus C$, מכיל את כל המספרים $k\in A$ כך ש- $\gcd(84,k)=1$.

הפירוק של 84 לגורמים ראשוניים הוא $84=2^2\cdot 3\cdot 7$, לכן

$$|A\setminus C|=\varphi(84)=84\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\left(1-\tfrac{1}{7}\right)=84\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{6}{7}=24 .$$

אז $|C|=84-24=60$, ומספר האפשרויות עבור B הוא מספר תת-הקבוצות של C מעוצמה 42, כלומר $\binom{60}{42}$.

ב. בכיתה ריבועית יש 16 כיסאות המסודרים בארבע שורות וארבעה טורים. על מנת למנוע העתקות בבוחן המתקיים בכיתה ובו משתתפים 16 תלמידים, הוחלט ליצור 4 גרסאות של הבוחן. בכמה דרכים ניתן לחלק את הבוחן כך ששני תלמידים היושבים זה לצד זה באותה השורה לא יקבלו את אותה הגרסה ובכל טור יופיעו כל הגרסאות של הבוחן?

בטור הראשון נחלק את הבוחן ללא הגבלות !4

וכל הטורים הבאים הם אי-סדרים יחסית לטור הקודם $\left(\frac{4!}{e}\right)$

לכן סה"כ: $4!\left(\frac{4!}{e}\right)^3$

<u>חלק ב:</u> ענו על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.

<u>שאלה ב1 (10%)</u>

מבין הסעיפים הבאים, סמן שניים שפתרונותיהם שווים:

1. מספר האפשרויות לפיזור 80 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לכל היותר 24 כדורים.
2. מספר האפשרויות לפיזור 80 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לפחות 8 כדורים.
3. מספר האפשרויות לפיזור 40 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לכל היותר 24 כדורים.
4. מספר האפשרויות לפיזור 40 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לפחות 24 כדורים.
5. מספר האפשרויות לפיזור 100 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לפחות 8 כדורים.

<u>הסבר</u>: ניתן למנות את מספר האפשרויות לפיזור 80 כדורים בין 5 תאים מובחנים כשבכל תא לכל היותר 24 כדורים באופן הבא. נמקם 24 כדורים בכל תא. זהו המספר המקסימלי של כדורים בתא. כעת נמנה את מספר האפשרויות להסרת כדורים מהתאים כך שיוותרו בסה"כ 80 כדורים. כלומר, עלינו להסיר $24 \cdot 5 - 80 = 40$ כדורים סך הכל, לכל היותר 24 מכל תא (כי זהו מספר הכדורים בתא).

<u>שאלה ב2 (10%)</u>

בכמה דרכים ניתן לפזר כדורים הצבועים ב- 5 צבעים שונים (כאשר יש אינסוף כדורים מכל צבע) ב-40 תאים, כך שאין תא ריק, אין כדורים מצבעים שונים באותו התא, וסה"כ מספר הכדורים בתאים הוא 200 ?

1. $\binom{199}{39}$
2. $\sum_{k=0}^{40}\left[(-1)^k\binom{40}{k}\binom{239}{39}\right]$
3. $\binom{199}{39}\cdot 5^{40}$
4. $\binom{239}{39}\cdot 5^{40}$

<u>הסבר</u>: נחלק את הכדורים לתאים ונבחר צבע לכל תא. מספר הדרכים לחלק 200 כדורים ל40 תאים כך שאין תא ריק היא: $\binom{199}{39}$ (ע"פ הנוסחא לחלוקת כדורים לתאים אחרי שהנחנו גדור אחד בכל תא).

מספר הדרכים לצבוע 40 תאים ב5 צבעים היא: 5^{40}

תשובה סופית: $\binom{199}{39} * 5^{40}$

שאלה ב3 (10%)

בגן חיות מכינים תצוגה של בעלי החיים, בתצוגה ישתתפו 3 פילים, אריה, ארנב וזוג יונים. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה על הבמה, כך שאף פיל אינו עומד ליד האריה?

(שים לב 2 חיות מאותו הסוג נחשבות זהות)

1. $\binom{3}{2}\cdot\left[2\cdot\binom{5}{3}+5\cdot\binom{4}{3}\right]$
2. $\binom{3}{2}\cdot 7\cdot\binom{4}{3}$
3. $\binom{7}{3,2,1,1}$
4. $7\cdot\left[\binom{6}{3,2,1}-\binom{5}{2,1,1,1}\right]$

הסבר: ניתן לסדר את החיות כך שהאריה באחד משני המקומות הקיצוניים בשורה או שהוא במקום אמצעי בשורה. ננתח כל מקרה בנפרד, ולבסוף נסכום (תוך שימוש בעיקרון הסכום)

- אם האריה בצד: יש 2 אפשרויות למקם את האריה (קצה ימני/שמאלי). אח"כ נשארו רק 5 מקומות אפשריים לפילים (המקום שהאריה תפס + המקום הסמוך לו אינם אפשרות קבילה עבור פיל), נבחר מתוכם 3 מקומות עבור הפילים, יש לכך $\binom{5}{3}$ אפשרויות. בשאר 3 המקומות הנותרים יש להושיב את הארנב וזוג היונים, ויש לכך $\binom{3}{2}$ אפשרויות.

  סה"כ: $2\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{2}$
- אם האריה במושב שאינו קיצוני: יש 5 אפשרויות למיקום האריה. נשארו 4 מקומות בהם יכול לשבת פיל (בלי המקום של האריה ושני המקומות הסמוכים לו) נבחר מקום עבור 3 הפילים. יש לכך $\binom{4}{3}$ אפשרויות. בשאר 3 המקומות נמקם את הארנב וזוג היונים, ויש לכך: $\binom{3}{2}$ אפשרויות.

  סה"כ: $5\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{2}$

<u>שאלה 4ב (10%)</u>

מצא נוסחת נסיגה למספר הסדרות בנות n אותיות שניתן לבנות מהאותיות A,B,C שלא מכילות את הצמדים AA ו – BC.

1. $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}$
2. $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$
3. $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$
4. $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + x_{n-3}$

<u>הסבר:</u>

נסמן ב- a_n את מספר הסדרות החוקיות באורך n המתחילות ב- A.

נסמן ב- b_n את מספר הסדרות החוקיות באורך n המתחילות ב- B.

נסמן ב- c_n את מספר הסדרות החוקיות באורך n המתחילות ב- C. אזי

(1) $x_n = a_n + b_n + c_n$

(2) $a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$

(3) $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

(4) $c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = x_{n-1}$

נציב את (4) ב- (1):

(5) $x_n = a_n + b_n + x_{n-1} \Rightarrow x_n - x_{n-1} = a_n + b_n$

מ- (2) ו- (4) נקבל:

(6) $a_n = b_{n-1} + x_{n-2}$

מ- (3) ו- (5) ימין נקבל:

(7) $b_n = x_{n-1} - x_{n-2}$

מ- (5) שמאל ו- (7) נקבל:

(8) $x_n = a_n + 2x_{n-1} - x_{n-2}$

מ- (6) ו- (7) נקבל:

(9) $a_n = 2x_{n-2} - x_{n-3}$

מ- (8) ו- (9) נקבל:

(10) $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}$

שאלה ב5 (10%)

בגן חיות מכינים תצוגה של בעלי החיים, בתצוגה ישתתפו 4 פילים, 3 ג'ירפות, אריה, זברה וזוג יונים. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה על הבמה? (שים לב 2 חיות מאותו הסוג נחשבות זהות)

1. $4! \cdot 3! \cdot 2!$
2. $11!$
3. $\frac{11!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$
4. $\frac{11!}{5!}$

הסבר: שימוש ישיר בנוסחת המולטינום.