

אוניברסיטת בן-גוריון המחלקה למדעי המחשב

פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, גב' יעל שטיין	בוהן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061
יונתן אלכסנדר, טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר	1.5.2014 17:00
אסור	חומר עזר
שעתיים וחצי	משך הבחינה

הנחיות חשובות:

- הבוחן מורכב משני חלקים.

בחלק א' **עליכם לענות על 2 שאלות בלבד** מתוך ה – 3. משקלה של כל שאלה הוא 30 נקודות. בכל שאלה ישנם שני סעיפים עליהם נדרשת תשובה מפורטת ומנומקת.

בחלק ב' **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 10 נקודות. בחלק זה אין לכתוב נימוק באף שאלה.

- במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו או לשאלה כלשהי, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף או השאלה. אין לכתוב "לא יודעים" על חלק מסעיף.

- רצוי לפתור את הבוחן תחילה במחברת הטיוטה ולאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת הבוחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

שאלה	א1	א2	א3	ב1	ב2	ב3	ב4	ב5
ציון								

<u>סה"כ</u>	
-------------	--

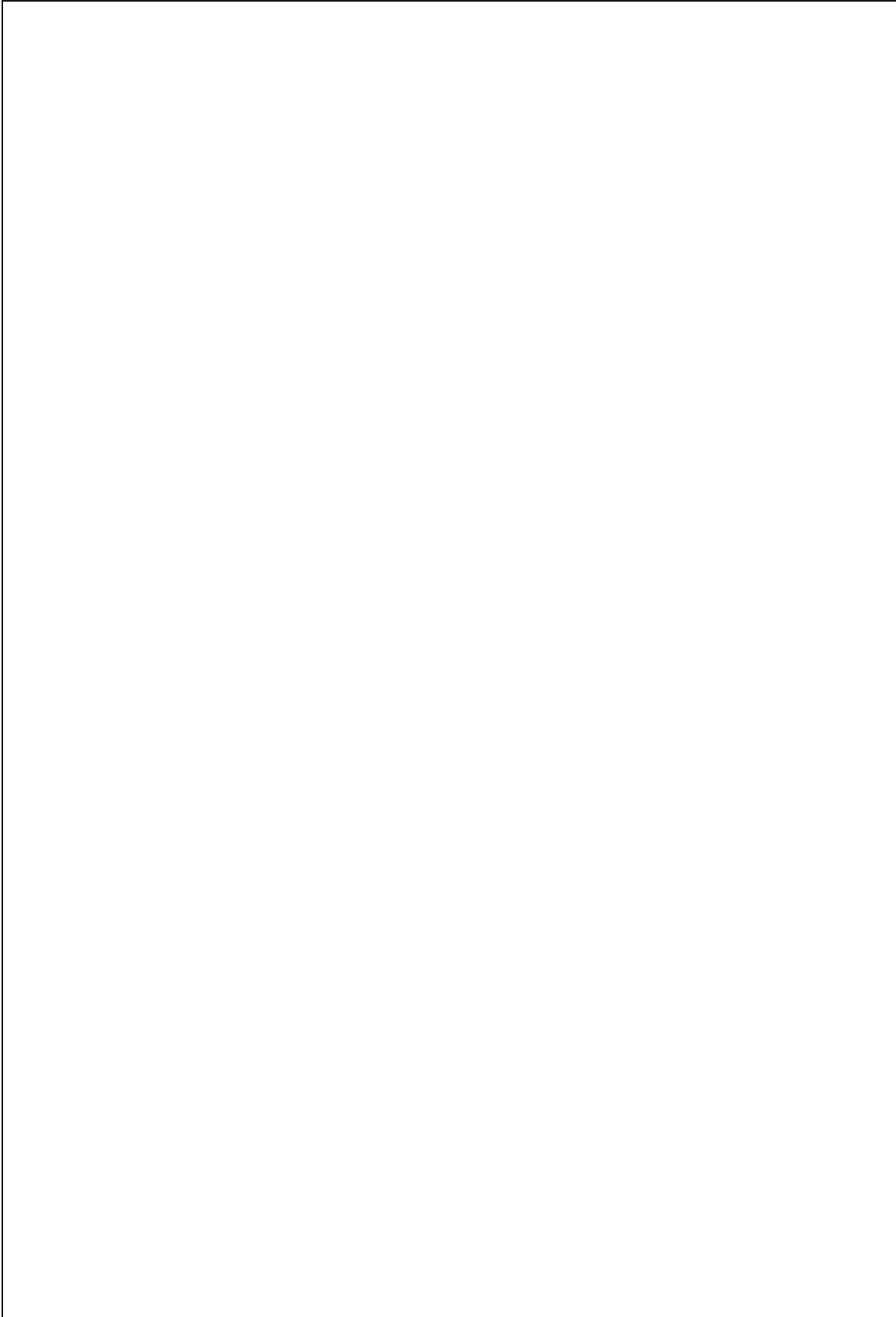
חלק א: ענו על 2 מתוך 3 השאלות הבאות. נמקו את תשובותיכם:

שאלה 1 א (30%)

- א. נתונה קבוצת המספרים $A = \{1, 2, \dots, 120\}$.
מהו מספר תתי הקבוצות של A שמקיימות את כל התנאים הבאים:
- קיים בדיוק מספר אחד בקבוצה שמתחלק ב-2.
 - קיים בדיוק מספר אחד בקבוצה שמתחלק ב-3.
 - קיים בדיוק מספר אחד בקבוצה שמתחלק ב-23.
 - כל מספר בקבוצה מתחלק בלפחות אחד מבין המספרים 2, 3, 23.

ב. הוכח את הזהות הבאה בדרך קומבינטורית (הוכחה בדרך אחרת לא תתקבל):

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k}^2 = n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$$



שאלה 2 א (30%)

א. נתונה סדרה באורך n של מספרים טבעיים (כלומר שלמים חיוביים). הוכיחו כי קיים תת רצף של הסדרה, שסכום המספרים בו מתחלק ב- n . לדוגמא, בהינתן הסדרה $(2,1,4,3,4,3)$, תת הרצף $1,4,3,4$ נותן סכום $1 + 4 + 3 + 4 = 12$, ו-12 אכן מתחלק ב: $n = 6$.

ב. פתרו את נוסחת הנסיגה:
 $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$
 $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 5$

שאלה 3א (30%)

א. תהי $A = \{1, 2, 3, \dots, 83, 84\}$. בכמה דרכים ניתן לבחור תת-קבוצה $B \subseteq A$ כך ש- $|B| = 42$ ולכל $b \in B$ יש מחלק משותף עם 84 שהוא גדול מ-1?

ב. בכיתה ריבועית יש 16 כיסאות המסודרים בארבע שורות וארבעה טורים. על מנת למנוע העתקות בבוהן המתקיים בכיתה ובו משתתפים 16 תלמידים, הוחלט ליצור 4 גרסאות של הבוהן. בכמה דרכים ניתן לחלק את הבוהן כך ששני תלמידים היושבים זה לצד זה באותה השורה לא יקבלו את אותה הגרסה ובכל טור יופיעו כל הגרסאות של הבוהן?

חלק ב: ענו על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.

שאלה ב1 (10%)

מבין הסעיפים הבאים, סמן שניים שפתרונותיהם שווים:

1. מספר האפשרויות לפיזור 80 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לכל היותר 24 כדורים.
2. מספר האפשרויות לפיזור 80 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לפחות 8 כדורים.
3. מספר האפשרויות לפיזור 40 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לכל היותר 24 כדורים.
4. מספר האפשרויות לפיזור 40 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לפחות 24 כדורים.
5. מספר האפשרויות לפיזור 100 כדורים בין 5 תאים מובחנים כך שבכל תא לפחות 8 כדורים.

שאלה ב2 (10%)

בכמה דרכים ניתן לפזר כדורים הצבועים ב- 5 צבעים שונים (כאשר יש אינסוף כדורים מכל צבע) ב-40 תאים, כך שאין תא ריק, אין כדורים מצבעים שונים באותו התא, וסה"כ מספר הכדורים בתאים הוא 200?

1. $\binom{199}{39}$
2. $\sum_{k=0}^{40} [(-1)^k \binom{40}{k} \binom{239}{39}]$
3. $\binom{199}{39} \cdot 5^{40}$
4. $\binom{239}{39} \cdot 5^{40}$

שאלה ב3 (10%)

בגן חיות מכינים תצוגה של בעלי החיים, בתצוגה ישתתפו 3 פילים, אריה, ארנב וזוג יונים. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה על הבמה, כך שאף פיל אינו עומד ליד האריה?

(שים לב 2 חיות מאותו הסוג נחשבות זהות)

1. $\binom{3}{2} \cdot [2 \cdot \binom{5}{3} + 5 \cdot \binom{4}{3}]$
2. $\binom{3}{2} \cdot 7 \cdot \binom{4}{3}$
3. $\binom{7}{(3,2,1,1)}$
4. $7 \cdot \left[\binom{6}{(3,2,1)} - \binom{5}{(2,1,1,1)} \right]$

שאלה 4 ב-10%

מצא נוסחת נסיגה למספר הסדרות בנות n אותיות שניתן לבנות מהאותיות A,B,C שלא מכילות את הצמידים AA ו-BC.

$$1. \quad x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}$$

$$2. \quad x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$$

$$3. \quad x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$4. \quad x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + x_{n-3}$$

שאלה 5 ב-10%

בגן חיות מכינים תצוגה של בעלי החיים, בתצוגה ישתתפו 4 פילים, 3 ג'ירפות, אריה, זברה וזוג יונים. בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה על הבמה? (שים לב 2 חיות מאותו הסוג נחשבות זהות)

$$1. \quad 4! \cdot 3! \cdot 2!$$

$$2. \quad 11!$$

$$3. \quad \frac{11!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$4. \quad \frac{11!}{5!}$$