מס' נבחן:________________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' סמסטר אביב	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין
16.7.2014 9:00	יונתן אלכסנדר, טל באומל, עודד בצלאל, לילך הייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל 5 שאלות, **<u>עליכם לענות על 4 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף</u>.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	**1**		**2**		**3**		**4**		**5**	
ציון										

<u>סה"כ</u>	

מס' נבחן:________________

שאלה 1

סעיף א (13 נק')

הוכיחו את הכיוון ה"מעניין" של משפט Hall:
יהי $G=(V_1,V_2;E)$ גרף דו-צדדי בו $|V_1|=|V_2|$. אם לכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)|\geq|S|$, אז יש ב- G זיווג מושלם.

הוכח בהרצאה.

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

יהי $r>0$ מספר טבעי, ויהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי r-רגולרי. נאמר שצביעה של **צלעות** הגרף ב-k צבעים $f: E \to \{1,\dots,k\}$ היא **צביעה חוקית** אם כל זוג צלעות שונות $\{u,x\},\{u,y\} \in E$ החלות בקדקוד משותף נצבעות בצבעים שונים.

הוכיחו כי ניתן לצבוע בצביעה חוקית את צלעות G תוך שימוש ב-r צבעים.

(<u>הערה</u>: ניתן להשתמש במשפט "בגרף דו-צדדי r-רגולרי קיים זיווג מושלם".)

באינדוקציה על r.
עבור r=1, ניתן לצבוע את כל צלעות הגרף באותו הצבע, כיוון שאין שתי צלעות עם קדקוד משותף.
(לו היה קדקוד כזה אז דרגתו הייתה גדולה מ- 1 בסתירה לנתון r=1.)
נניח שהטענה נכונה עבור r-1>0 ונוכיח עבור r.
עפ"י המשפט המוזכר בהערה, יש ב- G זיווג מושלם, ויהי M זיווג כזה.
נתבונן בגרף G'=(V,E\M). זהו גרף דו-צדדי (r-1)-רגולרי, ולכן, עפ"י הנחת האינדוקציה ניתן לצבוע חוקית את צלעותיו ב- (r-1) צבעים. כמו כן ניתן לצבוע חוקית את כל צלעות M באותו הצבע, מפני שאין ב- M זוג צלעות עם קדקוד משותף. לכן, נצבע את כל צלעות M בצבע אחד השונה מהצבעים שכבר השתמשנו בהם. יחד, קבלנו צביעה חוקית של G ב- r צבעים.

מס' נבחן:________________

<u>שאלה 2</u>

<u>סעיף א (15 נק')</u>

תהי F קבוצת כל תתי הקבוצות של $\{1,\dots,8\}$ מגודל 6. הוכיחו כי קיים סידור של איברי F במעגל, כך שלכל שתי תתי קבוצות סמוכות במעגל A, B מתקיים $A \cup B = \{1,\dots,8\}$.

נגדיר גרף G=(V,E) כך ש- V= F ו- $E=\{(A,B) \mid A \cup B = \{1,\dots,8\}\}$, כלומר קב' הקוד' היא איברי F ויש צלע בין כל 2 קוד' שאיחודם הוא $\{1,\dots,8\}$.

נבחין כי בגרף יש $\binom{8}{6} = 28$ קוד' ודרגת כל קוד' היא $\binom{6}{4} = 15$ – עבור קוד' A, מס' תתי הקב' מ-F שאיחודם עם A הוא $\{1,\dots,8\}$ הוא $\binom{6}{4}$: בהכרח יהיו בתתי הקב' הללו 2 המספרים שחסרים ב-A, ובנוסף 4 מתוך 6 המספרים הנותרים.

עבור כל שני קוד', ובפרט עבור 2 קוד' שאינם שכנים A,B מתקיים:
$\deg(A) + \deg(B) = 15 + 15 = 30 \geq 28 = n$, ולכן לפי משפט Ore קיים בגרף מעגל המילטון. מעגל זה מכיל את כל קוד' הגרף, ולפי בניית הצלעות מתקיים כי לכל 2 איברים סמוכים A,B במעגל: $A \cup B = \{1,\dots,8\}$, כנדרש.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

נבחרת X עולה לגמר המונדיאל מול נבחרת Z. ידוע שבהסתברות 0.4 נבחרת X תבקיע ראשונה, ושבהסתברות 0.3 נבחרת X תנצח. כמו כן, ההסתברות שנבחרת X תנצח בהינתן שהיא זו שהבקיעה ראשונה היא 0.5. חשבו את ההסתברות לכך שנבחרת X תנצח וגם לא תבקיע ראשונה.

נגדיר את המאורעות הבאים:
A – נבחרת X תנצח.
B – נבחרת X תבקיע ראשונה.

נבחין כי ההסתברות המבוקשת היא של המאורע $\mathrm{A} \cap \overline{B}$.

אנו יודעים מהנתונים כי מתקיימים: $Pr(A|B) = 0.5, \quad Pr(B) = 0.4, \quad Pr(A) = 0.3$.

כמו כן, לפי נוסחת ההסתברות המותנית: $Pr(A|B) = \frac{Pr(A\cap B)}{Pr(B)}$. נציב את הנתונים ונקבל:
$Pr(A \cap B) = \mathrm{Pr}(A|B)\,\mathrm{Pr(B)} = 0.5 * 0.4 = 0.2$.

עתה נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה: $Pr(A) = Pr(A \cap B) + Pr\left(\mathrm{A} \cap \overline{B}\right)$
ונקבל: $Pr\left(\mathrm{A} \cap \overline{B}\right) = Pr(A) - Pr(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$

שאלה 3

סעיף א (15 נק')

יהי $G=(V,E)$ גרף עם n קדקודים, ונניח שקיימים זוג קדקודים $s,t\in V$ שמרחקם בגרף הוא 9.
הוכיחו כי קיים קדקוד בגרף מדרגה לכל היותר $n/4$.

יהי $p=(s, v_1, v_2, \dots, v_8, t)$ מסלול באורך 9 בין הקוד' s,t (המרחק ביניהם הוא 9).

נתבונן בקוד' s, v_3, v_6, t, ונבחין כי לא ייתכן כי ל-2 מבין קוד' אלו יש שכן משותף, כי אז נקבל מסלול מ-s ל-t באורך קטן מ-9 בסתירה לכך שהמרחק ביניהם הוא 9.

נניח בשלילה שדרגת כל אחד מהקוד' s, v_3, v_6, t גדולה מ-$n/4$. מפני שקבוצות השכנים שלהם זרות (אין שכנים משותפים) נקבל כי איחוד קב' השכנים של 4 הקוד' הללו גדול מ- $n = 4 * \frac{n}{4}$,
כלומר סה"כ מס' השכנים של s, v_3, v_6, t גדול מ-n בסתירה לכך שיש n קוד' בגרף.

לכן בהכרח הדרגה של לפחות אחד מבין הקוד' s, v_3, v_6, t היא לכל היותר $n/4$.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

בלוח שחמט מגודל $n \times n$, $n > 0$, הצריח יכול לנוע מהמשבצת הנוכחית לכל משבצת אחרת באותה השורה או באותה העמודה. הראו שקיים סיור של הצריח על הלוח, המתחיל ומסתיים במשבצת השמאלית התחתונה, כך שעבור כל זוג משבצות x, y בלוח שהן על אותה שורה או על אותה עמודה, יש מהלך אחד ויחיד של הצריח ביניהן (כלומר, מהלך מ- x ל- y או מ- y ל- x, אך לא שניהם).

נגדיר גרף G=(V,E) כך ש- V= {כל המשבצות בלוח} ו- E={(u,v)| u,v באותה שורה/עמודה},
כלומר קב' הקוד' היא המשבצות ויש צלע בין כל שני קוד' שנמצאים באותה שורה או באותה עמודה.

נבחין כי הגרף קשיר: עבור שני קוד' u,v, אם הם באותה שורה/עמודה בהכרח יש ביניהם צלע, אחרת קיים קוד' x שהוא המשבצת שנמצאת בשורה של u ובעמודה של v (או להיפך) ואז יש מסלול מ-u ל-v שעובר דרך x, (u,x,v).

בנוסף דרגת כל קוד' היא 2*(n-1) – עבור קוד' כלשהו u יש (n-1) צלעות ל-n-1 הקוד' שנמצאים בשורה שלו ו-(n-1) צלעות ל-n-1 הקוד' שנמצאים בעמודה שלו.

לכן, לפי משפט אוילר, מאחר שהגרף קשיר וכל הדרגות בו זוגיות, קיים בגרף מעגל אוילר.

נלך על צלעות מעגל זה, כשאנו מתחילים במשבצת השמאלית התחתונה, ונקבל את הסיור המבוקש – לפי הגדרת הצלעות יש צלע בין כל 2 קוד' באותה שורה או באותה עמודה, ובמעגל אוילר אנו עוברים בכל הצלעות האלו, פעם אחת בכל צלע. כלומר קיים סיור שעובר בכל זוג משבצות שנמצאות באותה שורה או באותה עמודה, ורק פעם אחת, כנדרש.

שאלה 4

יהי Ω אוסף כל הגרפים מעל קבוצת הקדקודים $\{1,2,\dots,n\}$. יהי (Ω, Pr) מרחב הסתברות עם התפלגות אחידה. כלומר, לכל $G \in \Omega$, $Pr(G) = 2^{-\binom{n}{2}}$.

סעיף א (15 נק')

נגדיר משתנה מקרי f על מרחב ההסתברות הנ"ל באופן הבא: עבור גרף G ב- Ω, הערך $f(G)$ הוא מספר הקדקודים מדרגה 1 ב- G. חשבו את התוחלת של f .

יהי A_i המאורע: דרגת הקדקוד i היא 1 .
נגדיר אינדיקטור f_i עבור המאורע A_i

$$f_i = \begin{cases} 0 & d(i) \neq 1 \\ 1 & d(i) = 1 \end{cases}$$

$$E(f_i) = P(A_i) = \frac{(n-1)2^{\binom{n-1}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

ע"פ הלינאריות של התוחלת

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} E(f_i) = n\frac{n-1}{2^{n-1}}$$

*הסבר על חישוב $P(A_i)$: נבחר את הצלע היחידה שמחוברת לקדקוד i , נכפול במספר הגרפים מעל n-1 הקדקודים הנותרים ונחלק במספר הגרפים מעל n קדקודים.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

נניח ש- n זוגי ונגריל גרף G מתוך Ω . חשבו את ההסתברות לכך ש- G הוא 1- רגולרי.

מספר הגרפים ה- 1-רגולריים שווה למספר הזיווגים המושלמים שניתן ליצור. מספר הדרכים לבחור את הצלעות בזיווג עם חשיבות לסדר הוא: $\binom{n}{\underbrace{2,2,\dots 2}_{\text{פעמים } n/2}}$. מכיוון שין חשיבות לסדרת הצלעות בזיווג, הערך המבוקש הוא:

$$\binom{n}{2,2,\dots 2}\Big/(n/2)!$$

נחלק מספר זה במספר הגרפים ב- Ω ונקבל:

$$P=\frac{\binom{n}{2,2,\dots,2}}{(n/2)!\,2^{\binom{n}{2}}}=\frac{n!}{(n/2)!\,2^{n/2}\cdot 2^{\binom{n}{2}}}$$

שאלה 5

סעיף א (13 נק')

יהי G גרף עם 50 קדקודים ועם התכונה הבאה: בכל רביעייה של קדקודים ישנם שניים שהם בלתי תלויים (כלומר, אין ביניהם צלע). הוכח שיש ב- G קבוצה בלתי תלויה של קדקודים מגודל 5.

לפי משפט ארדש-סקרש מתקיים: $R(4,5) \leq \binom{4+5-2}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$.

נתבונן בגרף K_{50}. מאחר ו- $R(4,5) \leq 35$, בכל צביעת צלעות של K_{50} ב-2 צבעים, אדום וכחול, נקבל שבהכרח יש בגרף K_4 כחול או K_5 אדום.

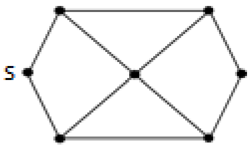
נצבע את הצלעות שקיימות ב-G בכחול ואת הצלעות שלא קיימות בו (כלומר, צלעות $\overline{G}$) באדום.

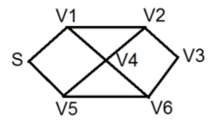
מאחר וב-G אין K_4 (בכל 4 קוד' יש 2 קוד' שהם בת"ל) נקבל כי לא קיים ב-K_{50} שצבענו K_4 כחול (הצלעות הכחולות הן של G ואין בו K_4), לכן יש בו בהכרח K_5 אדום, כלומר יש בגרף $\overline{G}$ קליקה בגודל 5 (הצלעות האדומות הן של $\overline{G}$), ובגרף G קוד' הקליקה מהווים קב' בת"ל בגודל 5, כנדרש.

מס' נבחן:________________

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

מצאו את מספר הטיולים באורך n המתחילים בקדקוד s? (כזכור, טיול באורך n מורכב מ- n צעדים, כאשר צעד הוא מעבר מקדקוד אחד לקדקוד שכן.) רשמו נוסחת נסיגה ואת הפתרון המפורש.





נחלק את הקדקודים ל-3 קבוצות:

$$A = \{S, V_3\}$$
$$B = \{V_1, V_2, V_5, V_6\}$$
$$C = \{V_4\}$$

נגדיר 3 נוסחאות נסיגה:

a_n מסלולים באורך n שמתחילים בקדקוד מקבוצה A

b_n מסלולים באורך n שמתחילים בקדקוד מקבוצה B

c_n מסלולים באורך n שמתחילים בקדקוד מקבוצה C

$$\begin{cases} a_n = 2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = 4b_{n-1} \end{cases}$$
$$b_n - b_{n-1} - 6b_{n-2} = 0$$

נפתור את הפולינום

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_1 = 3 \; x_2 = -2$$

נמצא נוסחה כללית

$$b_n = 3^n A + (-2)^n B$$

נציב את מקרי הקצה

$$\begin{cases} 3 = 3A - 2B \\ 9 = 9A + 4B \end{cases}$$
$$B = 0 \; A = 1$$

נציב את התוצאות

$$b_n = 3^n \rightarrow a_n = 2 * 3^{n-1}$$

בהצלחה !