מס' נבחן:_______________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב' סמסטר אביב	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין
16.7.2014 9:00	יונתן אלכסנדר, טל באומל, עודד בצלאל, לילך הייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל 5 שאלות, **<u>עליכם לענות על 4 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף</u>.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	1		2		3		4		5	
ציון										

<u>סה"כ</u>	

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 1</u>

<u>סעיף א (13 נק')</u>

הוכיחו את הכיוון ה"מעניין" של משפט Hall:
יהי $G = (V_1, V_2; E)$ גרף דו-צדדי בו $|V_1| = |V_2|$. אם לכל $S \subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)| \geq |S|$, אז יש ב- G זיווג מושלם.

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

יהי $r > 0$ מספר טבעי, ויהי $G = (V, E)$ גרף דו-צדדי r-רגולרי. נאמר שצביעה של **צלעות** הגרף ב-k צבעים $f: E \to \{1, \dots, k\}$ היא **צביעה חוקית** אם כל זוג צלעות שונות $\{u, x\}, \{u, y\} \in E$ החלות בקדקוד משותף נצבעות בצבעים שונים.
הוכיחו כי ניתן לצבוע בצביעה חוקית את צלעות G תוך שימוש ב-r צבעים.
(<u>הערה</u>: ניתן להשתמש במשפט "בגרף דו-צדדי r-רגולרי קיים זיווג מושלם".)

שאלה 2

סעיף א (15 נק')

תהי F קבוצת כל תתי הקבוצות של $\{1,\dots,8\}$ מגודל 6. הוכיחו כי קיים סידור של איברי F במעגל, כך שלכל שתי תתי קבוצות סמוכות במעגל A,B מתקיים $A\cup B=\{1,\dots,8\}$.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

נבחרת X עולה לגמר המונדיאל מול נבחרת Z. ידוע שבהסתברות 0.4 נבחרת X תבקיע ראשונה, ושבהסתברות 0.3 נבחרת X תנצח. כמו כן, ההסתברות שנבחרת X תנצח בהינתן שהיא זו שהבקיעה ראשונה היא 0.5. חשבו את ההסתברות לכך שנבחרת X תנצח וגם לא תבקיע ראשונה.

שאלה 3

סעיף א (15 נק')

יהי $G = (V, E)$ גרף עם n קדקודים, ונניח שקיימים זוג קדקודים $s, t \in V$ שמרחקם בגרף הוא 9.
הוכיחו כי קיים קדקוד בגרף מדרגה לכל היותר $n/4$.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

בלוח שחמט מגודל $n \times n$, $n > 0$, הצריח יכול לנוע מהמשבצת הנוכחית לכל משבצת אחרת באותה השורה או באותה העמודה. הראו שקיים סיור של הצריח על הלוח, המתחיל ומסתיים במשבצת השמאלית התחתונה, כך שעבור כל זוג משבצות x, y בלוח שהן על אותה שורה או על אותה עמודה, יש מהלך אחד ויחיד של הצריח ביניהן (כלומר, מהלך מ- x ל- y או מ- y ל- x, אך לא שניהם).

שאלה 4

יהי Ω אוסף כל הגרפים מעל קבוצת הקדקודים $\{1,2,\ldots,n\}$. יהי (Ω, Pr) מרחב הסתברות עם התפלגות אחידה. כלומר, לכל $G \in \Omega$, $Pr(G) = 2^{-\binom{n}{2}}$.

סעיף א (15 נק')

נגדיר משתנה מקרי f על מרחב ההסתברות הנ"ל באופן הבא: עבור גרף G ב- Ω, הערך $f(G)$ הוא מספר הקדקודים מדרגה 1 ב- G. חשבו את התוחלת של f .

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

נניח ש- n זוגי ונגריל גרף G מתוך Ω . חשבו את ההסתברות לכך ש- G הוא 1- רגולרי.

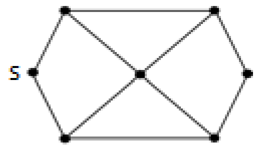
שאלה 5

סעיף א (13 נק')

יהי G גרף עם 50 קדקודים ועם התכונה הבאה: בכל רביעייה של קדקודים ישנם שניים שהם בלתי תלויים (כלומר, אין ביניהם צלע). הוכח שיש ב- G קבוצה בלתי תלויה של קדקודים מגודל 5.

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

מצאו את מספר הטיולים באורך n המתחילים בקדקוד s? (כזכור, טיול באורך n מורכב מ- n צעדים, כאשר צעד הוא מעבר מקדקוד אחד לקדקוד שכן.) רשמו נוסחת נסיגה ואת הפתרון המפורש.



בהצלחה !