מס' נבחן:________________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א סמסטר אביב	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין
25.6.2014 9:00	יונתן אלכסנדר, טל באומל, עודד בצלאל, לילך חייטמן, נתי פטר, ארנולד פילצר
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל 5 שאלות, **<u>עליכם לענות על 4 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף</u>.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	1		2		3		4		5	
ציון										

<u>סה"כ</u>	

מס' נבחן:_______________

שאלה 1

סעיף א (13 נק')

הוכיחו את משפט נוסחת אוילר:

יהי G גרף מישורי קשיר. אז $n+f-m=2$, כאשר n מספר הקודקודים, m מספר הצלעות ו - f מספר הפאות של הגרף G.

ההוכחה נלמדה בכיתה.

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי וקשיר עם n קדקודים, m צלעות ו- f פאות. נניח f>1.
יהי $g\in\mathbb{N}$ כך שאורך כל מעגל ב- G הוא לפחות g.
הוכיחו כי מתקיים: $2m\geq f\cdot g$ (1) $m\leq \frac{g}{g-2}(n\text{-}2)$ (2)

עבור פאה f, נגדיר t_f להיות מספר הצלעות שחלות בפאה f. כל פאה בגרף מישורי תחומה על ידי מעגל (כי ידוע שמספר הפאות הוא לפחות 2) שכל צלעותיו חלות בפאה. נתון שכל מעגל הוא לפחות בגודל g, ולכן לכל פאה f מתקיים $t_f\geq g$ ובפרט $\sum_f t_f\geq f\cdot g$.
נשים לב כי כל צלע חלה לכל היותר ב2 פאות (צלעות פנימיות חלות בפאה בודדת) ולכן $2m\geq\sum_f t_f$. משילוב 2 האי שוויונות נקבל $2m\geq f\cdot g$ כנדרש.

הגרף מישורי וקשיר ולכן מקיים את נוסחת אוילר. נציב את נוסחת אוילר באי שוויון שקיבלנו:

$$2m\geq f\cdot g=(2+m-n)\cdot g=2g+mg-ng$$
$$(g-2)m\leq(n-2)g$$
$$m\leq\frac{g}{g-2}(n-2)$$

כאשר האי השוויון האחרון מתקיים מכיוון ש $g\geq 3$ (ידוע שיש לפחות מעגל אחד בגרף ולא יתכן שהוא קצר ממש מ3). כנדרש.

שאלה 2

סעיף א (12 נק')

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון כך שלכל זוג מעגלים מאורך אי זוגי יש קדקוד משותף.
הוכיחו כי ניתן לצבוע את קדקודי הגרף G בצביעה חוקית תוך שימוש ב- 5 צבעים לכל היותר.

נזכור שגרף הוא 2-צביע אם"ם הוא דו-חלקי אם"ם אין בו מעגל אי זוגי. לכן אם בגרף G אין מעגל אי-זוגי, אז הוא 2 צביע, ובפרט 5 צביע כנדרש.
נניח כי בגרף G יש מעגל אי-זוגי C. נגדיר $G' = G \setminus C$ להיות הגרף המושרה על ידי כל הקודקודים שאינם ב C. נשים לב כי בG' אין אף מעגל אי זוגי. וזה מכיוון שלכל מעגל אי זוגי C' שהיה ב G, היה קודקוד משותף עם C, ולכן אינו מופיע ב G'. (ברור שכל מעגל בG' הוא גם מעגל בG , ולכן אם בשלילה יש מעגל אי זוגי C' ב G', אז יש מעגל אי זוגי C' ב G זר לC , סתירה.)
קיבלנו כי G' הוא 2-צביע. תהי f' 2-צביעה חוקית של קודקודי G'. C הוא מעגל אי זוגי, ולכן כפי שנלמד בכיתה הוא 3-צביע. תהי f_c 3 צביעה חוקית של קודקודי C (כאשר 3 הצבעים שונים מ2 הצבעים שהשתמשנו בהם ב f'). נשים לב כי $f = f' \cup f_c$ היא 5 צביעה חוקית של קודקודי G.

סעיף ב (13 נק')

סניף דואר מטפל בממוצע ב-1000 מכתבים ביום כאשר השונות היא 200.
כמו כן, אין תלות בין הימים (כלומר, מספר המכתבים המטופלים ביום אחד אינו תלוי במספר המכתבים המטופלים ביום אחר).

א. מצאו חסם תחתון להסתברות שמספר המכתבים שיטופלו מחר הינו בין 800 ו- 1200 (לא כולל הקצוות).

נסמן ב- f את מספר המכתבים שיטופלו מחר. נתון ש- E[f]=1000 ו- V[f]=200. עלינו למצוא חסם תחתון למאורע A: 800 < f < 1200.
נשים לב ש- p(A)=p(|f-E[f]| < 200)=1-p(|f-E[f]| ≥ 200) .
עפ"י אי-שוויון צ'ביצ'ב, p(|f-E[f]| ≥ 200)≤V[f]/200^2=1/200.
לכן, p(A)≥1-1/200=199/200.

ב. מצאו חסם עליון קטן מ- $\frac{1}{2}$ להסתברות שמספר המכתבים שיטופלו ביומיים הבאים הינו לפחות 2800.

נסמן ב- f את מספר המכתבים שיטופלו מחר וב- g את מספר המכתבים שיטופלו מחרתיים.
אזי, E[f+g]=E[f]+E[g]=2000, וגם V[f+g]=V[f]+V[g]=200+200=400 (כי f,g ב"ת).
עלינו למצוא חסם עליון למאורע A: f+g ≥2800. נשתמש באי-שוויון צ'ביצ'ב:
P(A)=p(f+g≥2800)=p(f+g-2000≥800)≤p(|f+g-2000|≥800)≤400/800^2=1/1600 .

שאלה 3

סעיף א (12 נק')

נתון שבגרף הפשוט $G=(V,E)$ קיים מעגל אוילר ובנוסף שמספר הקדקודים בגרף הוא אי זוגי.
הוכיחו כי קיימים לפחות שלושה קדקודים בגרף בעלי דרגה זהה.

עפ"י משפט שנלמד, הנתון "קיים מעגל אוילר" גורר שכל הדרגות הן זוגיות. כמו כן, לא יתכן שקיימים זוג קדקודים כך שדרגת האחד היא 0 ודרגת השני היא n-1. לכן מספר הדרגות האפשריות הוא (n-1)/2, ועפ"י עקרון שובך היונים ((n-1)/2 שובכים ו- n יונים) קיים שובך עם לפחות 3 יונים, כלומר ישנם שלושה קדקודים בעלי דרגה זהה.

סעיף ב (13 נק')

נגדיר $M = \{s_1 s_2 \dots s_k : s_i \in \{0,1,\dots,i\}\} \subset \{0,1,\dots k\}^k$. בוחרים בהתפלגות אחידה מחרוזת מ - M.
מה התוחלת של סכום ספרות המחרוזת הנבחרת?

נגדיר את f כמ"מ המתאים לכל מחרוזת במרחב המדגם את סכום הספרות שלה.
ונגדיר גם לכל $1 \leq i \leq k$ משתנה מקרי f_i המתאים למחרוזת את ערך הספרה ה-i שלה.
מובן ש $f = \sum_{i=1}^{k} f_i$.
מליניאריות התוחלת, $E(f) = E\left(\sum_{i=1}^{k} f_i\right) = \sum_{i=1}^{k} E(f_i)$
ניתן לראות שבהנתן מחרוזת אקראית s ואינדקס i ניתן למצוא i מחרוזות אחרות ב- M אשר זהות ל- s מלבד ב- s_i, וכל אחת מהמחרוזות הללו מקבלת ערך אחר ב-i. משיקולי סימטריה ההסתברות של הספרה ה - i לקבל ערך כלשהו t, $0 \leq t \leq i$ היא $1/(i+1)$ לכל ערך t,
כלומר $E(f_i) = \sum_{t\in\mathbb{R}} t \cdot \Pr(f_i = t) = \sum_{t=1}^{i} \frac{1}{i+1} t = \frac{(i+1)i}{2(i+1)} = \frac{i}{2}$.
נחשב את E(f):
$E(f) = \sum_{i=1}^{k} E(f_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2} = \frac{k(k+1)}{4}$.

שאלה 4

סעיף א (15 נק')

הוכיחו שבגרף דו-צדדי G=(V1,V2,E) עם |V1|=|V2|=n ודרגה מינימלית לפחות n/2,
יש זיווג מושלם.

ניזכר במשפט *Hall* **:** בגרף דו-צדדי $G=(V_1,V_2,E)$, $|V_1|=|V_2|$, יש זיווג מושלם אם"ם לכל תת קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)|\ge|S|$ (כאשר ב – $\Gamma(S)$ נסמן את קבוצת הקודקודים השכנים לקודקודי הקבוצה S).

נניח בשלילה שבגרף אין זיווג מושלם כלומר קיימת תת קבוצה $S\subseteq V_1$ כך ש $|S|>|\Gamma(S)|$.

נסתכל על שני מקרים:

מקרה א': $|S|\le\frac{n}{2}$. לכל קודקוד ב S יש לפחות n/2 שכנים(מהנתון) לכן מספר השכנים של כל קבוצה S הוא גם כן לפחות n/2 כלומר $|\Gamma(S)|\ge\frac{n}{2}$. לכן נקבל $|\Gamma(S)|\ge\frac{n}{2}\ge|S|\longrightarrow$ $|S|\ge|\Gamma(S)|$. בסתירה להנחה.

מקרה ב': $|S|>\frac{n}{2}$.

מתקיים $\frac{n}{2}\le|\Gamma(S)|<|S|\le n$.

כיוון ש $n>|\Gamma(S)|$ קיים קודקוד כלשהו $u\notin\Gamma(S)$, $u\in V_2$. כיוון ש u לא שכן של אף קדקוד בS (אחרת היה ב $\Gamma(S)$) כל שכני u נמצאים ב $V1\backslash S$.

נשים לב ש $|V1\backslash S|=|V1|-|S|=n-|S|<\frac{n}{2}$. כלומר הדרגה המקסימלית של קודקוד u קטנה ממש מ*n/2* בסתירה לנתון(שדרגת כל קודקוד היא לפחות *n/2*),

כלומר ההנחה שלנו לא נכונה ו $|\Gamma(S)|\ge|S|$.

כיוון שלכל תת קבוצה $S\subseteq V_1$ מתקיים $|\Gamma(S)|\ge|S|$ נובע ממשפט *Hall* שיש שידוך מושלם בגרף.

סעיף ב (10 נק')

מה מספר הסדרות $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ כך שכל $a_i \in \{0,1,2,3\}$, וכך שאין מופע של 3 בשום מקום מימין ל- 0. (כלומר, אין i ו- j טבעיים כך ש- $1 \le i < j \le n$ וכך ש- $a_i = 0$ ו- $a_j = 3$)
מצאו ביטוי סגור למספר זה.

מספר הסדרות בהן לא מופיע 0 כלל הוא 3^n(בכל אחד מהמיקומים בחירת ספרה מ $\{1,2,3\}$) , וכל הסדרות האלה חוקיות לפי הגדרת השאלה.

נסתכל על סדרות בהן הספרה 0 מופיעה לפחות פעם אחת.

נסמן את מיקום ה0 השמאלי ביותר בסדרה ב k. אם כך, עד למיקום הk(יש k-1 מיקומים עד למיקום זה) יכולה להיות כל אחת מבין הספרות $\{1,2,3\}$(0 לא יכולה להופיע כי אז המיקום הk לא היה השמאלי ביותר), ומהמיקום הk ואילך(יש n-k מיקומים מהמיקום הזה ואילך) יכולה להוסיף כל אחת מבין הספרות $\{0,1,2\}$(3 לא יכולה להופיע כי אז הסדרה לא חוקית לפי הגדרת השאלה), כלומר כל הסדרות החוקיות בהן מופיע ה0 השמאלי ביותר במקום הk הן: $3^{k-1} * 3^{n-k}$. כיוון שk יכול להיות כל מספר בין 1 לn, מתקבל הביטוי הבא עבור מספר הסדרות החוקיות המכילות 0:

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} * 3^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1+n-k} = \sum_{k=1}^{n} 3^{n-1} = n * 3^{n-1}$$

בצירוף מספר הסדרות ללא 0 מתקבל שסך כל הסדרות החוקיות הוא:

$$n * 3^{n-1} + 3^{\mathrm{n}}$$

פתרון נוסף באמצעות נוסחאות נסיגה:

a_n – סדרות חוקיות באורך n המכילות 0.

b_n – סדרות חוקיות באורך n שלא מכילות 0.

c_n – סדרות חוקיות באורך n

כדי ליצור סדרה חוקית באורך n המכילה 0, ניתן או לקחת סדרה חוקית באורך n-1 המכילה 0 ולהוסיף לה אחד מבין {0,1,2} או לקחת סדרה חוקית באורך n-1 שלא מכילה 0 ולהוסיף לה 0.

$$(1)\ a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1}$$

כדי ליצור סדרה חוקית באורך n שלא מכילה 0, ניתן לקחת סדרה חוקית באורך n-1 שלא מכילה 0 ולהוסיף לה אחד מבין {1,2,3}.

$$(2)\ b_n = 3b_{n-1}$$

מ(1):

$$b_{n-1} = a_n - 3a_{n-1}$$

הצבה ב(2):

$$a_{n+1} - 3a_n = 3a_n - 9a_{n-1} \rightarrow a_{n+1} - 6a_n + 9a_{n-1} = 0$$

משוואה אופיינית:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 3$$

הפתרון מהצורה:

$$a_n = A * 3^2 + B * n * 3^n$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_1 = 1(\text{הסדרה } 0); a_2 = 6(\text{הסדרות } 00,01,02,10,20,30)$$

לאחר הצבת תנאי ההתחלה ,מתקבל A=0,B=1/3 ולכן :

$$a_n = n * 3^{n-1}$$

נציב חזרה ב(1)

$$n * 3^{n-1} = 3(n-1) * 3^{n-2} + b_{n-1} \rightarrow b_{n-1} = 3^{n-1} \rightarrow b_n = 3^n$$

מס' הסדרות החוקיות הוא

$$c_n = a_n + b_n = n * 3^{n-1} + 3^n$$

מס' נבחן:________________

שאלה 5

סעיף א (15 נק')

כמה עצים מתויגים ישנם על $\{1,\dots,n\}$ בהם קבוצת הקדקודים הפנימיים היא בדיוק $\{1,\dots,k\}$?

נשים לב כי בהכרח $k<n-1$ כי בעץ יש לפחות 2 עלים.
ראינו בכיתה כי קודקוד הוא עלה בעץ אם"ם הוא לא מופיע בקוד פרופר של העץ, לכן נותר לספור כמה קודי פרופר ישנם (מאורך $n-2$) מעל $\{1,\dots,k\}$, המכילים לפחות פעם אחת כל אחד מהמספרים $1,\dots,k$. נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה:
- S קבוצת כל הסדרות מאורך $n-2$ מעל $\{1,\dots,k\}$.
- לכל $1\leq i\leq k$ נגדיר A_i להיות קבוצת כל הסדרות מאורך $n-2$ מעל $\{1,\dots,k\}$ שלא מכילות את המספר i.

קל לראות ש $|S|=k^{n-2}$, ולכל i מתקיים ש $|A_i|=(k-1)^{n-2}$, וכן גודל חיתוך של j קבוצות כלשהן הוא $(k-j)^{n-2}$. לכן התשובה היא

$$\left|S\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\right|=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^{n-2}$$

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

מה ההסתברות שבהגרלת תת קבוצה מגודל k בהתפלגות אחידה מתוך {1,…,n} אין שני מספרים עוקבים? מצאו ביטוי סגור להסתברות זו.

נחשב את מספר הקבוצות מגודל k ללא שני מספרים עוקבים. ניתן לייצג כל בחירה כזו על ידי סדרה מאורך n מעל {0,1}, המכילה בדיוק k אחדות, וכן אין שני אחדות סמוכים (כאשר מיקומי האחדות הם האיברים שנבחרים).
נסדר תחילה את k האחדות בשורה. כעת, ישנם n-k אפסים, חייבים לשים k-1 מתוכם כך שיפרידו בין כל שני אחדות, ונותרים לנו n-k-(k-1)=n-2k+1 אפסים לחלק. נשים לב שמותרות חזרות אך אין חשיבות לסדר, וישנם k+1 תאים אפשריים לכל אפס (k-1 תאים בין האחדות, ועוד 2 בקצוות).
יש לכך $\binom{(n-2k+1)+(k+1)-1}{(k+1)-1}=\binom{n-k+1}{k}$ אפשרויות.

מרחב המדגם שלנו הוא מגודל $\binom{n}{k}$ עם התפלגות אחידה, לכן ההסתברות לבחור קבוצה מגודל k ללא שני מספרים עוקבים היא $\frac{\binom{n-k+1}{k}}{\binom{n}{k}}$.

בהצלחה !