מס' נבחן:_______________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב סמסטר קיץ	ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין
25.10.2013 9:00	עמית צור, לילך חייטמן
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל 5 שאלות, **<u>עליכם לענות על 4 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף</u>**.
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	1		2	3			4			5		
ציון												

<u>סה"כ</u>	

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 1</u>

<u>סעיף א (13 נק')</u>

הוכח את המשפט הבא:

מספר הסדרות המאוזנות שכוללות n אפסים ו-n אחדות הוא $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

מס' נבחן:_______________

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

הוכח בדרך קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

שני האגפים מתארים את מספר האפשרויות לבחור מתוך קבוצה A שתי תתי קבוצות B, C כך שמתקיים: $C \subseteq B \subseteq A$, $|A| = n$ ו-$|C| = m$.

הסבר בדומה לפתרונות המוצעים לשאלה 3 ב' בתרגול 14.

<u>שאלה 2</u>

במהלך טיולו ללאס וגאס, נכנס דני לקזינו כדי להמר.
לאחר כל הימור, דני זוכה ב- 1,000$ אם הצליח בהימור ומפסיד 1,000$ אם לא הצליח.
שימו לב כי יכול להיות מצב בו דני נמצא במאזן שלילי, כלומר, חייב כסף לקזינו.
דני ביצע בדיוק 100 הימורים בקזינו.

סדרת תוצאות ההימורים של דני היא סדרה המורכבת מ"הפסד" ו"זכיה" המתארים האם הצליח בכל אחד מההימורים או לא.

כמה סדרות תוצאות אפשריות ישנן, תחת כל אחת מהמגבלות הבאות?
על התשובה להיות ביטוי סגור **ולא סכום**. נמקו תשובתכם בקצרה.

<u>סעיף א (4 נק')</u>

ללא הגבלות נוספות.

מספר סדרות התוצאות באורך 100: 2^{100}

<u>סעיף ב (4 נק')</u>

דני נכנס לקזינו עם 2,000$ ויצא ממנו עם אותו הסכום בדיוק.

כמספר סדרות התוצאות בהן מספר הזכיות שווה למספר ההפסדים, כלומר 50 מכל אחד: $\binom{100}{50}$

סעיף ג (4 נק')

דני נכנס לקזינו עם $2,000 ויצא ממנו עם $15,000.

לא אפשרי היות וצריך להתקיים כי ההפרש בין מספר ההפסדים לזכיות אי זוגי, בעוד סכומם זוגי ושווה ל-100.

סעיף ד (4 נק')

דני נכנס לקזינו עם $2,000 ויצא ממנו ברווח (כלומר, עם סכום גדול מ- $2,000).

כמספר סדרות התוצאות בהן מספר הזכיות גדול ממספר ההפסדים.
מסימטריה, זהה למספר סדרות התוצאות בהן מספר ההפסדים גדול ממספר הניצחונות.
נחשב באמצעות המשלים: $\frac{2^{100}-\binom{100}{50}}{2}$

<u>סעיף ה (4 נק')</u>

דני נכנס ויצא מהקזינו ללא כסף, ולכל אורך שהותו בקזינו לא היה חייב לקזינו כסף.

כמספר קלטן עבור n=50 : $\frac{1}{51}\binom{100}{50}$

<u>סעיף ו (5 נק')</u>

דני נכנס לקזינו ללא כסף, יצא מהקזינו עם 2,000$ ולאורך כל שהותו בקזינו, מלבד פרק הזמן שמכניסתו לקזינו ועד ההימור השני, היה ברווח של 2,000$ לפחות.

כמספר סדרות התוצאות המתחילות בשתי זכיות שלאחריהן סדרת תוצאות באורך 98 בה מספר זהה של זכיות והפסדים ובכל רישא מספר הזכיות גדול או שווה למספר ההפסדים.
לכן, הערך המבוקש הוא מספר קטלן עבור n=49: $\frac{1}{50}\binom{98}{49}$

מס' נבחן:__________________

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א (8 נק')</u>

מה מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה $\sum_{k=1}^{4} x_k = n$, תחת האילוצים:
$x_1 + x_2 > 0$, $x_2 + x_3 > 0$, $x_3 + x_4 > 0$?

נתייחס לבעיה כבעיית חלוקת כדורים זהים לתאים.
נפתור בעזרת עקרון ההכלה וההדחה. מספר הפתרונות ללא האילוצים הוא
$\binom{n+3}{3} = \binom{n+4-1}{4-1}$. נסמן:
A_1 - קבוצת הסידורים בהם $x_1 + x_2 = 0$,
A_2 - קבוצת הסידורים בהם $x_2 + x_3 = 0$,
A_3 - קבוצת הסידורים בהם $x_3 + x_4 = 0$.
אם כן, לכל $1 \le i \le 3$, $|A_i| = \binom{n+2-1}{2-1} = n+1$.
בנוסף, $|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = 1$, $|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. לכן מעקרון ההכלה וההדחה, מס' הסידורים/פתרונות הוא $\binom{n+3}{3} - 3 \cdot (n+1) + 2$.

מס' נבחן:__________________

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

1) מהו המקדם של x^{15} בפולינום $(\sum_{n=0}^{10} x^n)^3$?

$$\left(\sum_{n=0}^{10} x^n\right)^3 = (1+x+x^2+\cdots+x^{10})^3 = \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^3 =$$

$(1-x^{11})^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n = (1-3x^{11}+3x^{22}-x^{33}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$.

שני המחוברים הימניים בסוגר השמאלי לא יכולים לתרום למקדם של x^{15}, לכן המקדם הנדרש הוא $\binom{15+2}{2} - 3\binom{4+2}{2} = \binom{17}{2} - 3\binom{6}{2}$.

2) מצא את הסדרה הנוצרת ע"י הפונקציה היוצרת $x^3(1+2x)^{-1}$.

$x^3(1+2x)^{-1} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty}(-2)^{n-3} x^n$.

אם כן, הסדרה הנוצרת הינה $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $\forall n \geq 3$ $a_n = (-2)^{n-3}$.

<u>סעיף ג (7 נק')</u>

יהא G גרף מישורי 5-רגולרי על 12 קדקודים. מי מהתשובות הבאות אפשרית? נמק.

א. ב-G כל הפאות הן משולשים.

ב. ב-G כל הפאות הן מחומשים.

ג. ב- G ישנן פאות מחומשות, אך לא כולן, ושאר הפאות הן משולשים.

ד. אף תשובה אינה אפשרית.

שאלה 4

יהי G גרף רגולרי עם לפחות 3 קדקודים.

סעיף א (7 נק')

יש להוכיח כי בגרף G או במשלימו $\overline{G}$, כל רכיב קשירות מכיל מעגל אוילר.

גרף בו דרגות כל הקדקודים זוגיות מכיל מעגל אוילר בכל רכיב קשירות. נפריד למקרים:

(i) n זוגי - מכך ש – G רגולרי, לכל הקדקודים דרגה זוגית ב - G ודרגה אי זוגית ב - $\bar{G}$, או ההיפך. אם כן, בגרף או במשלים שלו, דרגות כל הקדקודים זוגיות.

(ii) n אי זוגי – אם דרגת כל קדקוד אי זוגית, סכום הדרגות אי זוגי וסתירה למשפט הדרגות. לכן דרגת כל קדקוד ב – G זוגית, וכל רכיב קשירות מכיל מעגל אוילר.

סעיף ב (8 נק')

יש להוכיח ש – G מכיל מסלול המילטון או שהגרף המשלים $\bar{G}$ מכיל מסלול המילטון.

שוב נפריד למקרים:

(i) n זוגי – כאן באחד מבין שני הגרפים (מקורי ומשלים), כל קדקוד מדרגה $\frac{|V|}{2}$ לפחות. לכן סכום הדרגות של כל שני קדקודים בגרף זה הוא לפחות $|V|$, וממשפט Ore הגרף (מקורי או משלים) מכיל מעגל המילטון, ולכן בפרט מסלול המילטון.

(ii) n אי זוגי – נסמן את דרגת הקדקודים ב – r. אם $r > \frac{n-1}{2}$, ממשפט Ore G מכיל מעגל המילטון. אם $r < \frac{n-1}{2}$, ממשפט Ore $\bar{G}$ מכיל מעגל המילטון. אם $r = \frac{n-1}{2}$, נוסיף לגרף קדקוד חדש s, ונחבר אותו בצלעות לכל יתר הקדקודים. בגרף שנוצר $n+1$ קדקודים, דרגת כל קדקוד מקורי היא $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$, וכן $d(s) = n$, לכן ממשפט Ore גרף זה מכיל מעגל המילטון, ומכאן שבניתוק המעגל ע"י הוצאת s נקבל ש - G מכיל מסלול המילטון כנדרש.

(המשך מקום לתשובה בעמוד הבא)

<u>סעיף ג (10 נק')</u>

יהא a_n מספר האפשרויות לקבל סכום n במספר כלשהו של הטלות קובייה.
יש להוכיח שאם סדר ההטלות חשוב, הפונקציה היוצרת של הסדרה (a_n) הינה $\frac{1}{1-x-x^2-\cdots-x^6}$.

שאלה 4 א' בעבודה 4.
בכל הטלה ניתן לקבל כ"א מהמספרים $1, \dots, 6$, לכן הפו"ר המתאימה עבור מספר האפשרויות לקבל סכום n ב k – הטלות: $(x+x^2+\cdots+x^6)^k$. אם כן, נותר לסכם את כל הערכים האפשריים ל - k, ולקבל שהפונקציה היוצרת של $\{a_n\}$ היא $\frac{1}{1-x-x^2-\cdots-x^6} = \sum_{k=0}^{\infty}(x+x^2+\cdots+x^6)^k$ כנדרש.

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 5</u>

<u>סעיף א (12 נק')</u>

יהי n מספר שלם כך ש- $n \ge 3$. נתבונן במרחב ההסתברות $\langle \Omega, \Pr \rangle$, שבו מרחב המדגם Ω הוא אוסף כל העצים המתויגים על הקדקודים $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ו- $\Pr$ היא התפלגות אחידה.

1) נבחר עץ T מ- Ω באופן אקראי. מהי ההסתברות שהדרגה של הקדקוד 1 היא לפחות $n-2$?

אם $\deg(1) = n-1$ אז T הוא כוכב שבו הקודקוד 1 מחובר לכל שאר הקדקודים. יש רק אפשרות 1 לעץ T במקרה זה.
אם $\deg(1) = n-2$ אז יש בדיוק קודקוד אחד v שאינו מחובר ל- 1, ויש $n-1$ אפשרויות עבור v. יש $n-2$ אפשרויות עבור השכן w של v (כל הקדקודים השונים מ- 1 ומ- v), ולכן:
יש $(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$ אפשרויות עבור T במקרה זה.
ממשפט קיילי אנו יודעים ש- $|\Omega| = n^{n-2}$, לכן ההסתברות המבוקשת שווה $\frac{n^2-3n+3}{n^{n-2}}$.

2) מה תוחלת מספר העלים בעץ T מ- Ω?

נגדיר, f – המ"מ המבוקש.
לכל i, $1 \le i \le n$, יהי f_i המשתנה המקרי המוגדר באופן הבא: לכל $T \in \Omega$,

$$f_i(T) = \begin{cases} 1, & \text{אם } i \text{ עלה של } T \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

כל f_i אינדיקטור, לכן לכל i, $1 \le i \le n$, מתקיים ש- $E[f_i] = \Pr(f_i = 1)$. נתון i כלשהו כך ש- $1 \le i \le n$, נחשב את מספר העצים $T \in \Omega$ כך ש- i עלה של T: ממשפט קיילי יש $(n-1)^{n-3}$ אפשרויות עבור העץ $T \setminus \{i\}$, ובעץ T יש $n-1$ אפשרויות עבור הקודקוד שאליו i מחובר. מעקרון הכפל יש $(n-1)\cdot(n-1)^{n-3} = (n-1)^{n-2}$ עצים $T \in \Omega$ כך ש- i עלה של T.

(המשך מקום לתשובה בעמוד הבא)

לכן

$$E[f_i] = \Pr(f_i = 1) = \frac{(n-1)^{n-2}}{|\Omega|} = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}}.$$

ברור ש- $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, לכן מהלינאריות של התוחלת אנחנו מסיקים ש-

$$E[f] = \sum_{i=1}^{n} E[f_i] = n \cdot \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-3}}.$$

<u>סעיף ב (5 נק')</u>

יהי $G = (V, E)$ גרף, n, $|V| = n$, ונסמן ב δ– את הדרגה המינימלית ב - G. יש להוכיח שאם $\delta \geq \frac{n-1}{2}$ אז G קשיר.

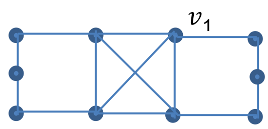
נניח בשלילה שהגרף אינו קשיר, ויהי G' רכיב קשירות עם מספר קדקודים מינימלי. אז $V(G') \leq \frac{n}{2}$. יהי $v \in V(G')$ כלשהו. מההנחה $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$, אבל ל v– לכל היותר $\frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$ שכנים, סתירה.

מס' נבחן:_______________

<u>סעיף ג (8 נק')</u>

נסחו נוסחת נסיגה המתארת את מספר הטיולים באורך n בגרף הבא, שמתחילים בקדקוד v_1.

ציינו את ערכי ההתחלה המתאימים.



בהצלחה !