

**אוניברסיטת בן-גוריון  
המחלקה למדעי המחשב**

ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין	מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד ב סמסטר קיץ
עמית צור, לילך חייטמן	25.10.2013 9:00
אסור	חומר עזר
שלוש שעות	משך הבחינה

**הנחיות חשובות:**

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיטה.**

**בהצלחה !**

שאלה	1	2	3	4	5
ציון					

<b>סה"כ</b>	
-------------	--


מס' נבחן: \_\_\_\_\_

שאלה 1

סעיף א (13 נק')

הוכח את המשפט הבא:

מספר הסדרות המאוזנות שכוללות  $n$  אפסים ו- $n$  אחדות הוא  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .



הוכח בדרך קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$



שאלה 2

במהלך טיולו ללאס וגאס, נכנס דני לקזינו כדי להמר. לאחר כל הימור, דני זוכה ב- \$1,000 אם הצליח בהימור ומפסיד \$1,000 אם לא הצליח. שימו לב כי יכול להיות מצב בו דני נמצא במאזן שלילי, כלומר, חייב כסף לקזינו. דני ביצע בדיוק 100 הימורים בקזינו.

סדרת תוצאות ההימורים של דני היא סדרה המורכבת מ"הפסד" ו"זכייה" המתארים האם הצליח בכל אחד מההימורים או לא.

כמה סדרות תוצאות אפשריות ישנן, תחת כל אחת מהגבלות הבאות?  
על התשובה להיות ביטוי סגור ולא סכום. נמקו תשובתכם בקצרה.

סעיף א (4 נק')

ללא הגבלות נוספות.

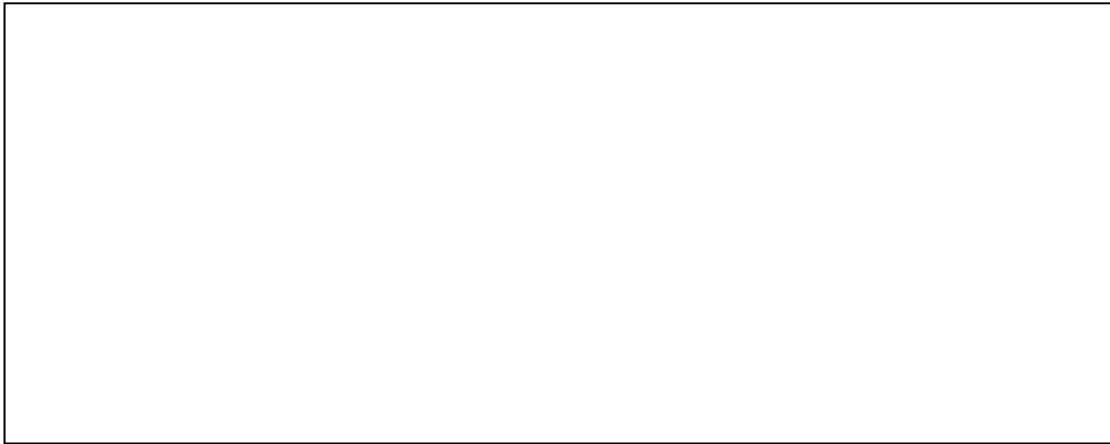
סעיף ב (4 נק')

דני נכנס לקזינו עם \$2,000 ויצא ממנו עם אותו הסכום בדיוק.

מס' נבחן: \_\_\_\_\_


סעיף ג (4 נק')

דני נכנס לקזינו עם \$2,000 ויצא ממנו עם \$15,000.



סעיף ד (4 נק')


דני נכנס לקזינו עם \$2,000 ויצא ממנו ברווח (כלומר, עם סכום גדול מ-\$2,000).



מס' נבחן: \_\_\_\_\_

סעיף ה (4 נק')

דני נכנס ויצא מהקזינו ללא כסף, ולכל אורך שהותו בקזינו לא היה חייב לקזינו כסף.

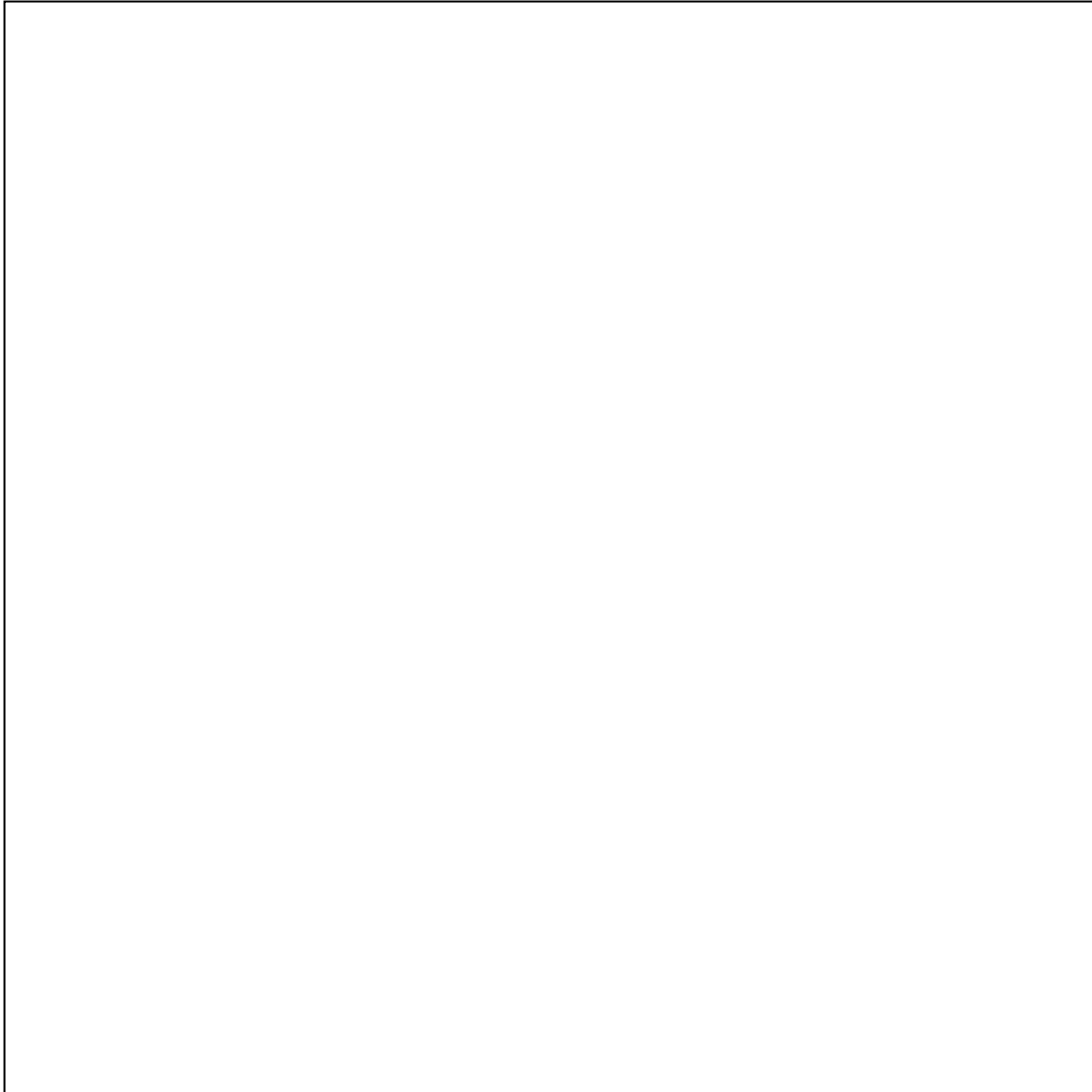


סעיף ו (5 נק')

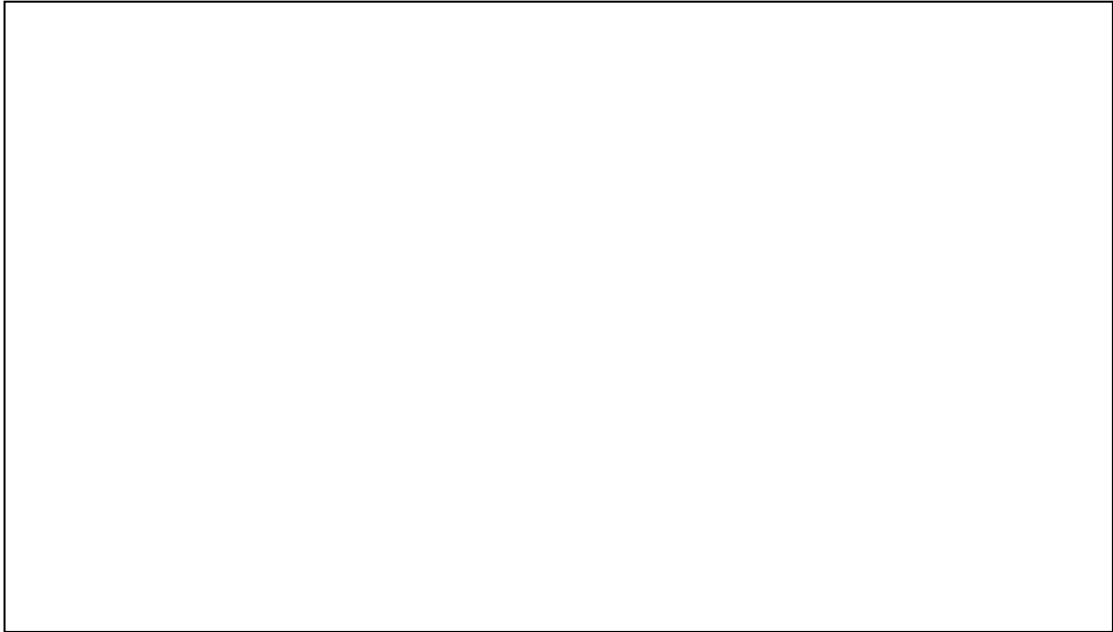
דני נכנס לקזינו ללא כסף, יצא מהקזינו עם \$2,000 ולאורך כל שהותו בקזינו, מלבד פרק הזמן שמכניסתו לקזינו ועד ההימור השני, היה ברווח של \$2,000 לפחות.



מה מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה  $\sum_{k=1}^4 x_k = n$ , תחת האילוצים:  
 $x_3 + x_4 > 0$ ,  $x_2 + x_3 > 0$ ,  $x_1 + x_2 > 0$ ?



(1) מהו המקדם של  $x^{15}$  בפולינום  $(\sum_{n=0}^{10} x^n)^3$ ?



(2) מצא את הסדרה הנוצרת ע"י הפונקציה היוצרת  $x^3(1+2x)^{-1}$ .





- יהא  $G$  גרף מישורי 5-רגולרי על 12 קדקודים. מי מהתשובות הבאות אפשרית? נמק.
- א.  $G$ -כל הפאות הן משולשים.
  - ב.  $G$ -כל הפאות הן מחומשים.
  - ג.  $G$ -ישנן פאות מחומשות, אך לא כולן, ושאר הפאות הן משולשים.
  - ד. אף תשובה אינה אפשרית.

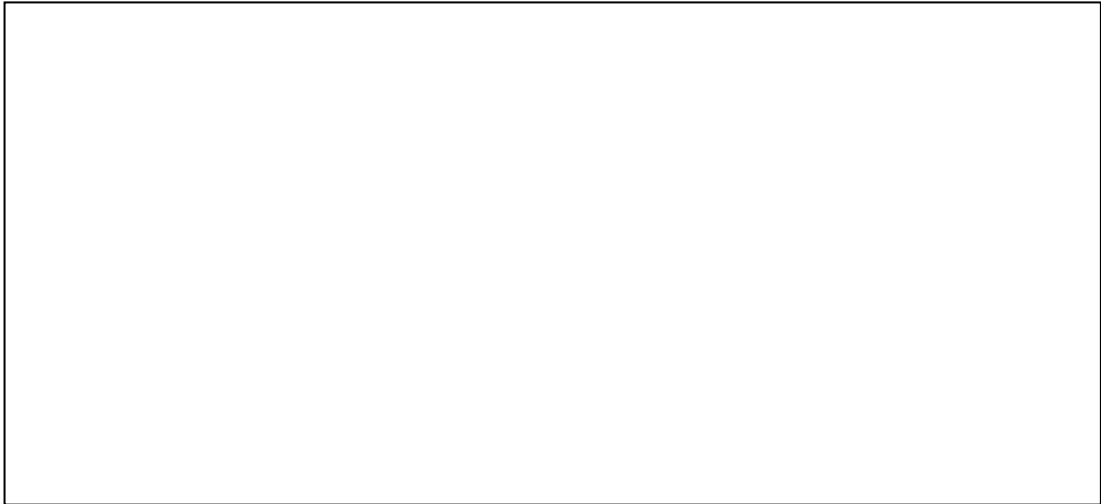


שאלה 4

יהי  $G$  גרף רגולרי עם לפחות 3 קדקודים.

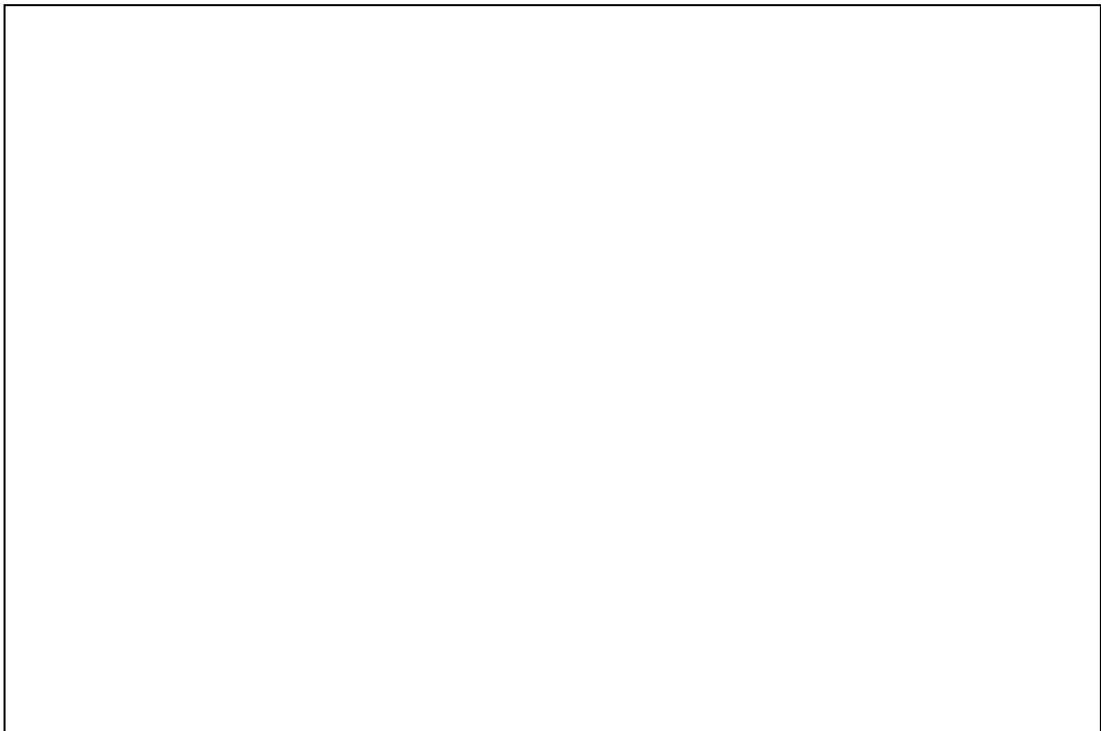
סעיף א (7 נק')

יש להוכיח כי בגרף  $G$  או במשלימו  $\bar{G}$ , כל רכיב קשירות מכיל מעגל אוילר.



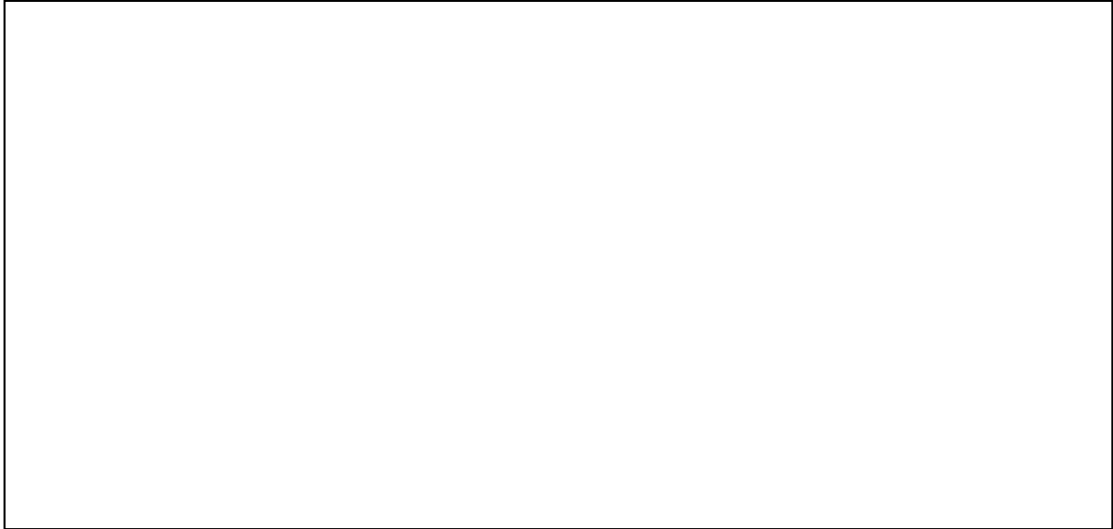
סעיף ב (8 נק')

יש להוכיח ש –  $G$  מכיל מסלול המילטון או שהגרף המשלים  $\bar{G}$  מכיל מסלול המילטון.



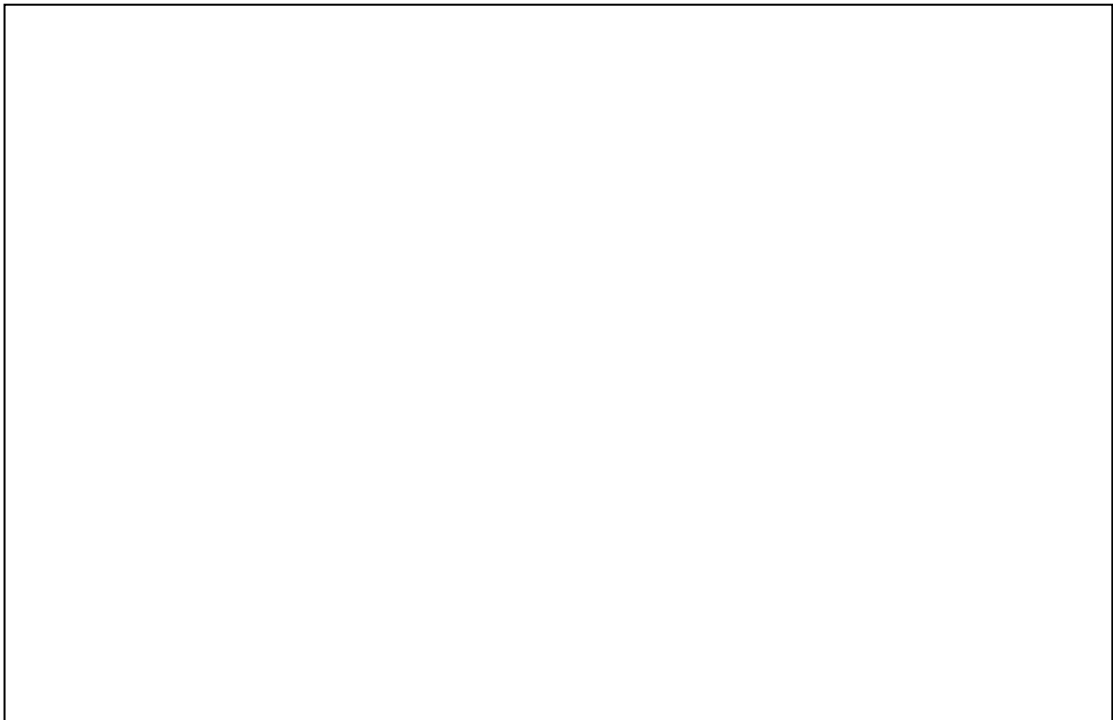
(המשך מקום לתשובה בעמוד הבא)

מס' נבחן: \_\_\_\_\_



סעיף ג (10 נק')

יהא  $a_n$  מספר האפשרויות לקבל סכום  $n$  במספר כלשהו של הטלות קובייה.  
יש להוכיח שאם סדר ההטלות חשוב, הפונקציה היוצרת של הסדרה  $(a_n)$  הינה  $\frac{1}{1-x-x^2-\dots-x^6}$ .




שאלה 5

סעיף א (12 נק')

יהי  $n$  מספר שלם כך ש-  $n \geq 3$ . נתבונן במרחב ההסתברות  $\langle \Omega, \text{Pr} \rangle$ , שבו מרחב המדגם  $\Omega$  הוא אוסף כל העצים המתויגים על הקדקודים  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  ו- $\text{Pr}$  היא התפלגות אחידה.

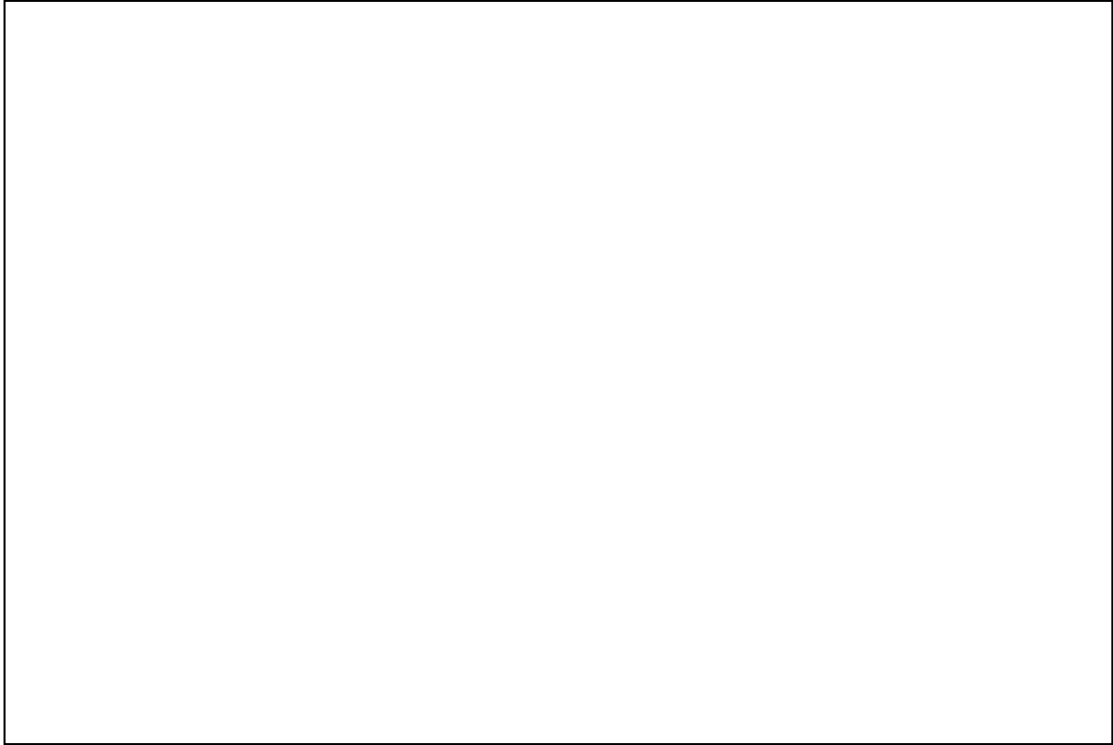
(1) נבחר עץ  $T$  מ- $\Omega$  באופן אקראי. מהי ההסתברות שהדרגה של הקדקוד 1 היא לפחות  $n-2$ ?



(2) מה תוחלת מספר העלים בעץ  $T$  מ- $\Omega$ ?

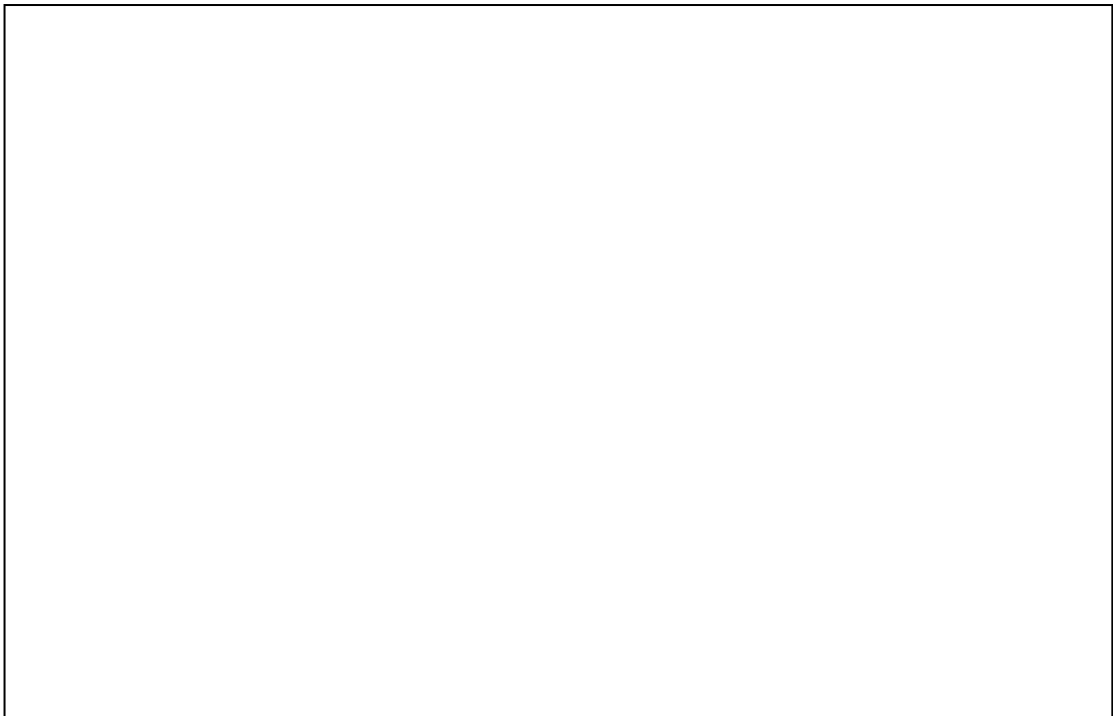


(המשך מקום לתשובה בעמוד הבא)



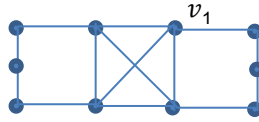
סעיף ב (5 נק')

יהי  $G = (V, E)$  גרף,  $|V| = n$ , ונסמן ב- $\delta$  את הדרגה המינימלית ב- $G$ . יש להוכיח שאם  $\delta \geq \frac{n-1}{2}$  אז  $G$  קשיר.



סעיף ג (8 נק')

נסחו נוסחת נסיגה המתארת את מספר הטיולים באורך  $n$  בגרף הבא, שמתחילים בקדקוד  $v_1$ .  
ציינו את ערכי ההתחלה המתאימים.



**בהצלחה !**