מס' נבחן:________________

אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061 מועד א סמסטר קיץ מועד ג סמסטר אביב	ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין
6.10.2013 9:00	עמית צור, לילך חייטמן
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל 5 שאלות, **<u>עליכם לענות על 4 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף</u>**.
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	1		2		3		4		5		
ציון											

<u>סה"כ</u>	

מס' נבחן:_______________

<u>שאלה 1</u>

<u>סעיף א (13 נק')</u>

הוכח את משפט Mantel עבור n זוגי:

יהי G גרף בעל n קודקודים וללא משולשים. אז ב –G יש לכל היותר $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$ צלעות.

מס' נבחן:________________

<u>סעיף ב (12 נק')</u>

תהא A תת קבוצה של 19 איברים שונים מתוך הסדרה החשבונית $1,4,7,10,13,\ldots,100$.
הוכח כי ישנם 2 מספרים שונים ב-A שסכומם 104.

נתבונן ב-18 הקבוצות הבאות: $\{1\},\{4,100\},\{7,97\},\ldots,\{49,55\},\{52\}$. מעיקרון שובך היונים, ישנם 2 מספרים ב-A המשתייכים לאותה הקבוצה בגודל 2 וסכומם 104.

מס' נבחן:________________

שאלה 2

סעיף א (12 נק')

בכמה מחרוזות בינאריות יש בדיוק n אפסים, ו- m אחדות, כך שיש k רצפים (לא ריקים) של 0-ים (נניח ש $k<n,m$).

לדוגמא, במחרוזת $\underbrace{0}\underbrace{0}1\underbrace{0000}111\underbrace{0}11\underbrace{00}1\underbrace{0}$ יש $k=5$ רצפים של אפסים.

תחילה נבחר את k הרצפים הלא ריקים של n האפסים. אחר-כך נפזר ב-k+1 המקומות המתקבלים בין הרצפים ובקצוות את m האחדות כשבין כל שני רצפים יהיה לפחות אחד אחד. עבור האפסים, מספר האפשרויות הוא כמספר הדרכים לפיזור n כדורים בין k תאים שאינם ריקים: $\binom{n-k+(k-1)}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$. עבור האחדות, מספר האפשרויות הוא כמספר הדרכים לפיזור m כדורים בין k+1 תאים ש-k-1 מתוכם אינם ריקים: $\binom{(m-k+1)+k}{k}=\binom{m+1}{k}$. ולכן סה"כ, מספר האפשרויות הוא: $\binom{n-1}{k-1}\cdot\binom{m+1}{k}$.

<u>סעיף ב (13 נק')</u>

הוכח את הזהות: $\binom{k-1}{k-n} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot \binom{n-i-1+k}{k}$ לכל $k \geq n \geq 1$.

אין לבצע העברת אגפים.

נוכיח קומבינטורית.
נתבונן בבעיה הבאה: מה מספר הדרכים לפזר k כדורים בין n תאים כך שאף תא אינו ריק?
<u>פתרון א'</u>: ראשית, נשים כדור אחד בכל תא. כעת, נפזר את $k-n$ הכדורים הנותרים בין התאים.
מספר האפשרויות הוא $\binom{k-1}{k-n} = \binom{k-n+(n-1)}{k-n}$ וזהו אגף ימין.
<u>פתרון ב'</u>:
נפתור בעזרת הכלה והדחה. נגדיר,
S – קבוצת כל החלוקות של k כדורים ל-n תאים,
ולכל $1 \leq i \leq n$, A_i – קבוצת החלוקות הנ"ל בהן התא ה-i נשאר ריק.
נבחין כי $|S| = \binom{n-1+k}{n-1}$. כמו כן, לכל $1 \leq i \leq n$, מספר החלוקות של k כדורים ל- n תאים כך ש-i תאים נתונים מתוכם נשארים ריקים הוא כמספר החלוקות של kכדורים ל- n-i תאים שהוא $\binom{n-i-1+k}{k}$.
לכן, סכום עוצמות החיתוכים בגודל i הוא $\binom{n}{i} \cdot \binom{n-i-1+k}{k}$.
הערך המבוקש הוא

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot \binom{n-i-1+k}{k}$$

שזהו אגף שמאל.

שאלה 3

סעיף א (7 נק')

פתרו את נוסחת הנסיגה:

$$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + 4a_{n-3}$$
$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = 2\ ,\ a_3 = 20$$

הפולינום האופייני: $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

שורשיו הם 4 בריבוי 1, ו- 1- בריבוי 2. כלומר $p(x) = (x-4)(x+1)^2$

לכן פתרון של נוסחת הנסיגה הוא מהצורה: $a_n = A \cdot 4^n + B \cdot (-1)^n + C \cdot n \cdot (-1)^n$

הצבת מקרי הבסיס נותנת את הפתרון: $a_n = 4^n + 2n(-1)^n$.

סעיף ב (8 נק')

חשב את מספר המספרים הטבעיים ה-4-ספרתיים שמתחלקים ב- 5 וכך שסכום הספרות הוא 17.

מדובר על מספר המספרים מהצורה $a_1a_2a_3a_4$ כך שכל $1 \le i \le 4$, a_i ספרה, ובנוסף a_4 שווה ל- 0 או ל- 5, $a_1 \neq 0$, ו- $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 17$. נפתור בעזרת בפונקציות יוצרות. התשובה תהיה המקדם של x^{17} בפולינום

$$F(x) = \left(x + x^2 + \cdots + x^9\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^9\right)^2\left(1 + x^5\right)$$

$$= x\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^8\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^9\right)^2\left(1 + x^5\right)$$

$$= x\left(1 + x^5\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^8\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^9\right)^2$$

$$=\left(x+x^{6}\right)\left(\frac{1-x^{9}}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^{2}=\left(x+x^{6}\right)\left(1-x^{9}\right)\left(1-x^{10}\right)^{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{3}}$$

$$=\left(x+x^{6}-x^{10}-x^{15}\right)\left(1-2x^{10}+x^{20}\right)\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+3-1}{3-1}x^{r}$$

$$=\left(x+x^{6}-x^{10}-x^{15}-2x^{11}-2x^{16}+2x^{20}+2x^{25}+x^{21}+x^{26}-x^{30}-x^{35}\right)\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+2}{2}x^{r}$$

למעשה רק החזקות הקטנות או שוות ל- 17 בפולינום המוכפל משמאל רלוונטיות למקדם של x^{17}.
לכן, המקדם של x^{17} במכפלה יהיה

$$\binom{18}{2}+\binom{13}{2}-\binom{9}{2}-\binom{4}{2}-2\binom{8}{2}-2\binom{3}{2}.$$

<u>סעיף ג (10 נק')</u>

תזכורת : גרף תחרות הוא גרף מכוון שבו לכל שני קדקודים x,y קיימת אחת הצלעות (x,y) או (y,x) אך לא שתיהן.

הוכח שבכל גרף תחרות $G=(V,E)$ קיים קודקוד $v\in V$ כך שלכל קודקוד $u\in V$ קיים מסלול מ-v ל-u באורך 2 או פחות.

נתבונן בקדקוד שדרגת היציאה שלו היא הגדולה ביותר בגרף. נסמנו ב-v.
נניח בשלילה שקיים קדקוד $u\in V$ כך שאין מסלול מ-v ל-u באורך 2 או פחות. כלומר, אין צלע מ-v ל-u וכן אין צלע מאף שכן של v ל-u.
כיוון שזהו גרף תחרות ניתן להסיק כי יש צלע מ-u ל-v, וכן צלע מ-u לכל אחד משכני v.
כלומר, דרגת היציאה של u גדולה בלפחות 1 מדרגת היציאה של v. זוהי סתירה למקסימליות דרגתו של v.

שאלה 4

סעיף א (7 נק')

יהי $T = (V, E)$ עץ על n קדקודים, מהם 7 קדקודים בדרגה 3, 10 קדקודים מדרגה 5 והיתר עלים. כמה עלים בעץ?

נסמן ב –k את מספר העלים.
ראשית, נבחין ש – $k = n - 17$.
בנוסף, ממשפט הדרגות ומכך ש – T עץ,
$\sum_{v\in V} d(v) = 7 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + k \cdot 1 = k + 71 = 2|E| = 2n - 2$.
אם כן, קיבלנו 2 משוואות בשני נעלמים: $k = n - 17$, $k + 73 = 2n$, והפתרון הוא $n = 56$, $k = 39$.

סעיף ב (18 נק')

יהי G גרף קשיר עם סדרת דרגות 4,4,4,4,3,1,1,1,1,1 .

1. הוכח שאין מסלול המילטון ב- G.

מסלול המילטון מכיל שני קדקודים לכל היותר מדרגה 1, משום שכל קודקוד מחובר לשתי צלעות במסלול, חוץ מהקודקוד הראשון והקודקוד האחרון. אבל בגרף G יש 5 קדקודים מדרגה 1.

מס' נבחן:_______________

2. הוכח ש- G אינו עץ.

ל- G יש 10 קדקודים, לכן אם הוא היה עץ אז היו לו 9 צלעות. אבל

$$2|E(G)| = \sum_{v\in V(G)} \deg(v) = 1+1+1+1+1+3+4+4+4+4+4 = 24$$

ולכן $|E(G)| = 12$.

3. הוכח שהגרף המשלים $\bar{G}$ אינו מישורי

<u>דרך א'</u>:

$$|E(\overline{G})| = |E(K_{10})| - |E(G)| = \binom{10}{2} - 12 = \frac{10\cdot 9}{2} - 12 = 45 - 12 = 33$$

ומצד שני,

$$3|V(\overline{G})| - 6 = 3|V(G)| - 6 = 3\cdot 10 - 6 = 24$$

כלומר, $|E(\overline{G})| > 3|V(\overline{G})| - 6$, ולכן $\overline{G}$ אינו מישורי.

<u>דרך ב'</u>: חמשת הקדקודים מדרגה 1 ב- G הם בלתי-תלויים ב- G. (אם היו שני שכנים מדרגה 1 ב- G, אז שני הקדקודים האלה והצלע ביניהם היו מהווים רכיב קשירות ב- G, בסתירה להנחה ש- G עצמו קשיר.) מכאן ש-5 הקדקודים האלה מהווים קליקה ב-$\overline{G}$, כלומר הם משרים תת-גרף K_5 של $\overline{G}$ ולכן $\overline{G}$ אינו מישורי.

4. ידוע שG מישורי. הוכח ש- G אינו דו-חלקי.
(רמז: יהי G' תת-הגרף של G המושרה ע"י הקדקודים מדרגות גדולות מ- 1.)

יהי G' תת-הגרף של G המושרה ע"י הקדקודים מדרגות גדולות מ- 1. אם G דו-חלקי אז גם G' דו-חלקי, לכן מספיק להראות ש- G' אינו דו-חלקי.
הגרף G' מתקבל מ- G ע"י השמטת חמשת הקדקודים מדרגה 1 וכל הצלעות שחלות בהם. לכל אחד מהקדקודים האלה יש בדיוק צלע אחת שחלה בו, והצלעות האלה שונות זו מזו כי אין ב- G שני קדקודים שכנים מדרגה 1 (כמו שכבר ראינו). לכן,

$$|E(G')| = |E(G)| - 5 = 12 - 5 = 7$$

נניח בשלילה ש- G' דו-חלקי. בפרט, זה אומר שאין משולש ב- G'. מכאן יש שתי דרכים להמשיך:

<u>דרך א'</u>: G' תת-גרף של הגרף המישורי G, לכן גם G' מישורי. יש לו 5 קדקודים ואין בו משולש, לכן מתקיים אי-השוויון $|E(G')| \le 2|V(G')| - 4$ (כמו שראינו בהוכחה ש- $K_{3,3}$ אינו מישורי).
אבל $|E(G')| = 7$ ו- $2|V(G')| - 4 = 2 \cdot 5 - 4 = 6$ והגענו לסתירה.

<u>דרך ב'</u>: G' גר על 5 קדקודים והנחנו שאין בו משולש. אז ממשפט Mantel נובע ש-

$$|E(G')| \le \left\lfloor \frac{5^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{25}{4} \right\rfloor = 6$$

ושוב הגענו לסתירה.

שאלה 5

סעיף א (10 נק')

בכיתה יש 20 תלמידים. ההסתברות שתלמיד נולד בחודש מסוים זהה עבור כל חודשי השנה.

1. מה ההסתברות שישנם 3 חודשים שבכל אחד מהם נולדו 4 מתלמידי הכיתה, 8 חודשים שבכל אחד מהם נולד תלמיד אחד וחודש שבו לא נולד אף תלמיד?

מרחב המדגם Ω הוא אוסף כל הסדרות באורך 20 שאיבריהם מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\dots,12\}$.
מכאן ש- $|\Omega| = 12^{20}$.
נגדיר A – המאורע הנדרש. נחשב את $|A|$. ישנן $\binom{12}{3}$ אפשרויות לבחירת 3 החודשים שבכל אחד מהם נולדו 4 תלמידים. מספר האפשרויות לבחירת התלמידים שנולדו בחודש הראשון מתוך השלושה הוא $\binom{20}{4}$ מה שמותיר $\binom{16}{4}$ אפשרויות לבחירת תלמידים שנולדו בחודש השני ו-$\binom{12}{4}$ אפשרויות לבחירת תלמידים שנולדו בחודש השלישי. נותרו 9 אפשרויות לבחירת החודש בו לא נולד אף תלמיד ו-$8!$ אפשרויות להתאמת 8 החודשים הנותרים לתלמידים.
אזי, $|A| = \binom{12}{3}\binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{4}9!$ ולכן $\Pr(A) = \frac{\binom{12}{3}\binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{4}9!}{12^{20}}$.

2. מה ההסתברות שגיל וגילה נולדו באותו החודש אם ידוע שאף תלמיד לא נולד בחודשי הקיץ יולי ואוגוסט ושלפחות ילד אחד נולד בספטמבר?

מכיוון שאף תלמיד לא נולד בחודשים יולי ואוגוסט מרחב המדגם Ω מצומצם יותר ומכיל רק סדרות באורך 20 שאבריהם מתוך קבוצה של 10 חודשים בלבד. לכן, $|\Omega| = 10^{20}$.
נגדיר A – המאורע בו גיל וגילה נולדו באותו החודש,
B – המאורע בו לפחות ילד אחד נולד בספטמבר.
ברצוננו לחשב,

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

נבחין כי אם גיל וגילה נולדו באותו החודש, ניתן להתייחס אליהם כאל ילד אחד בהתאמת החודשים לתלמידים.
נחשב את $|A \cap B|$ ואת $|B|$ בעזרת המאורע המשלים, ונקבל

$$\Pr(A \cap B) = \frac{10^{19}-9^{19}}{10^{20}} =, \ \ \Pr(B) = \frac{10^{20}-9^{20}}{10^{20}}$$

לכן,

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{10^{19}-9^{19}}{10^{20}} \cdot \frac{10^{20}}{10^{20}-9^{20}} = \frac{10^{19}-9^{19}}{10^{20}-9^{20}} \approx 0.0985$$

3. מה תוחלת מספר החודשים בהם נולד לפחות תלמיד אחד, אם ידוע שאף תלמיד לא נולד באפריל?

מכיוון שאף תלמיד לא נולד באפריל, מרחב המדגם Ω מכיל רק סדרות באורך 20 שאבריהם מתוך קבוצה של 11 חודשים בלבד. לכן, $|\Omega| = 11^{20}$.
נגדיר את f להיות המשתנה המקרי המתאים לכל מאורע בסיסי את מספר החודשים בהם נולד לפחות תלמיד אחד. אנו מעוניינים בערך $E[f]$.
נגדיר עבור $A_i, i \in \{1,2,3,5,\ldots,11\}$ – המאורע בו לפחות תלמיד אחד נולד בחודש ה-i.
נגדיר את f_i להיות משתנה אינדיקטור למאורע A_i. אזי,

$$E[f_i] = \Pr(A_i) = 1 - \frac{10^{20}}{11^{20}}$$

כמו כן, מליניאריות התוחלת,

$$E[f] = E\left[\sum_{i\in\{1,2,3,5,\ldots,11\}} f_i\right] = \sum_{i\in\{1,2,3,5,\ldots,11\}} E[f_i] = 11\left(1 - \frac{10^{20}}{11^{20}}\right)$$

$$= 11 - \frac{10^{20}}{11^{19}} \approx 9.365$$

<u>סעיף ב (8 נק')</u>

יהי $G = (V, E)$ גרף עם לפחות 2 קדקודים, בו לכל $u, v \in V$ שאינם שכנים $(u \neq v)$, $d(u) + d(v) \geq n - 2$. צ"ל שב – G שתי מסילות פשוטות זרות בקדקודים, שאיחודן הוא תת גרף פורש של G.
הערה: מסילה כזו יכולה להיות באורך 0, כלומר קדקוד בודד.

(מתוך תרגיל בית 6)
נוסיף שני קדקודים לגרף, s, t, ונחבר כל אחד מהם בצלעות לכל יתר הקודקודים. בגרף המתקבל, שנסמנו $H = (V \cup \{s,t\}, E \cup \{\{s,v\} : v \in V\} \cup \{\{t,v\} : v \in V\})$, $n + 2$ קדקודים; בנוסף, מכך שלכל קדקוד $v \in V$ דרגה גדולה ב – 2 מדרגתו בגרף המקורי, סכום הדרגות של כל שני קדקודים מ- V ב - H הוא לפחות $n - 2 + 4 = n + 2$. כמו כן, s ו-t שכנים בניהם וכל אחד מהם שכן של כל קודקודי V. לכן עבור כל זוג קודקודים שאינם שכנים מתקיים ממשפט Ore, כי הגרף H מכיל מעגל המילטון. השמטת s, t מנתקת את מעגל ההמילטון בשתי מקומות (לכל היותר) ולכן בגרף המתקבל, G, יש שתי מסילות שיחד מכסות את כל קודקודי G כנדרש.
הערה: ייתכן ש - s, t צמודים במעגל ההמילטון ב - H, ולכן השמטתם משאירה מסילת המילטון ב – G. מסילת כזאת ממילא ניתנת להפרדה לשתי מסילות זרות כנדרש.

מס' נבחן:________________

סעיף ג (7 נק')

בשפה ההוואית 13 צלילים: 8 עיצורים ו-5 תנועות. כל הברה מורכבת באחד האופנים הבאים:

i. תנועה בודדת (למשל "a")
ii. עיצור ולאחריו תנועה (למשל "lo").

לדוגמא במילה Hawaii 4 הברות: Ha-wa-i-i. כל מילה הבנויה לפי כללים אלה נחשבת חוקית.

נסחו נוסחת נסיגה המתארת את מספר המילים החוקיות בשפה ההוואית בעלות n אותיות.

נסמן ב- a_n את מספר המילים החוקיות באורך n.
נתבונן באפשרויות לבחור הברה ראשונה – במידה ובחרנו הברה שהיא תנועה בודדת, הרי שאורכה הוא אות יחידה. לאחריה נשארנו עם n-1 אותיות שצריכות ליצור מילה חוקית (שכן אין אילוץ על הקשר בין הברות). לאותה תנועה יחידה יש 5 אפשרויות שונות (אחת עבור כל תנועה בשפה) וסה"כ נקבל ממקרה זה $5a_{n-1}$ אפשרויות שונות.
במידה והמילה מתחילה בעיצור ולאחריו תנועה, הרי שנשארנו עם n-2 אותיות שצריכות ליצור מילה חוקית (שוב, מאותם שיקולים כמו קודם). לעיצור 8 אפשרויות ולתנועה 5, ע"פ עקרון הכפל יש 40 אפשרויות ליצור הברה שכזו, כלומר ממקרה זה נקבל $40a_{n-2}$ אפשרויות שונות.
כיוון שכל מילה חוקית בהכרח מתחילה באחת מההברות הללו, וכיוון שהחלוקה הינה זרה, ע"פ עקרון החיבור אנחנו מקבלים ש- $a_n = 5a_{n-1} + 40a_{n-2}$. ערכי ההתחלה שלנו הם $a_1 = 5, a_2 = 65$.

בהצלחה !