

**אוניברסיטת בן-גוריון  
המחלקה למדעי המחשב**

ד"ר סטוארט סמית, יעל שטיין	<b>מבנים בדידים וקומבינטוריקה</b> 202-1-1061 מועד א סמסטר קיץ מועד ג סמסטר אביב
עמית צור, לילך חייטמן	6.10.2013 9:00
<b>אסור</b>	חומר עזר
שלוש שעות	משך הבחינה

**הנחיות חשובות:**

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות. יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיטה.**

**בהצלחה !**

5	4	3	2	1	שאלה
					ציון

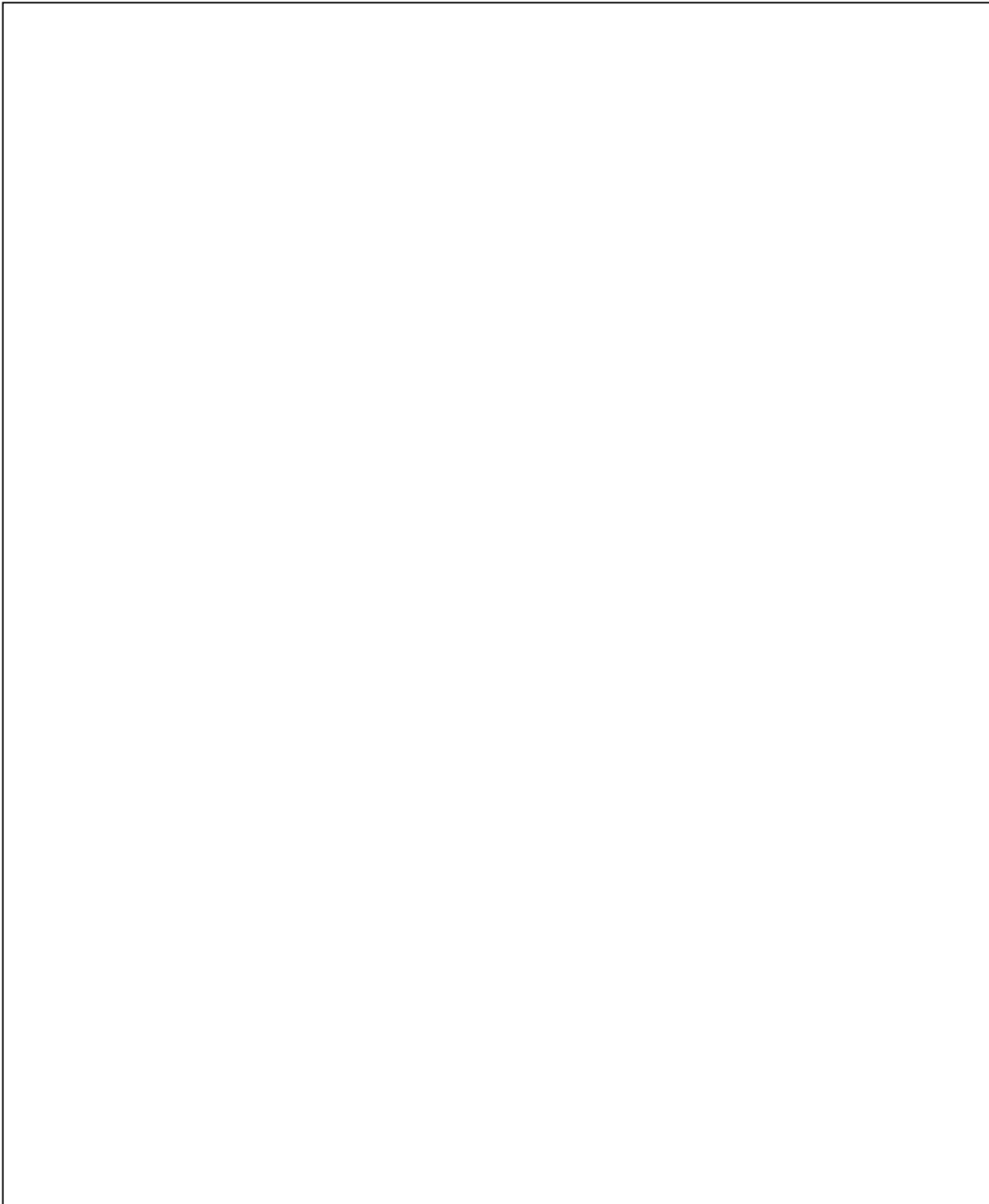
<b>סה"כ</b>	
-------------	--

שאלה 1

סעיף א (13 נק')

הוכח את משפט Mantel עבור  $n$  זוגי:

יהי  $G$  גרף בעל  $n$  קודקודים וללא משולשים. אז ב  $G$  יש לכל היותר  $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  צלעות.



מס' נבחן: \_\_\_\_\_

סעיף ב (12 נק')

תהא A תת קבוצה של 19 איברים שונים מתוך הסדרה החשבונית  $1, 4, 7, 10, 13, \dots, 100$ .  
הוכח כי ישנם 2 מספרים שונים ב-A שסכומם 104.



שאלה 2

סעיף א (12 נק')

בכמה מחרזות בינאריות יש בדיוק  $n$  אפסים, ו- $m$  אחדות, כך שיש  $k$  רצפים (לא ריקים) של 0-ים (נניח  $k < n, m$ ).  
לדוגמא, במחרזות  $\underline{00100001110110010}$  יש  $k=5$  רצפים של אפסים.



סעיף ב (13 נק')

הוכח את הזהות:  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot \binom{n-i-1+k}{k} = \binom{k-1}{k-n}$  לכל  $k \geq n \geq 1$ .

אין לבצע העברת אגפים.




שאלה 3

סעיף א (7 נק')

פתרו את נוסחת הנסיגה:

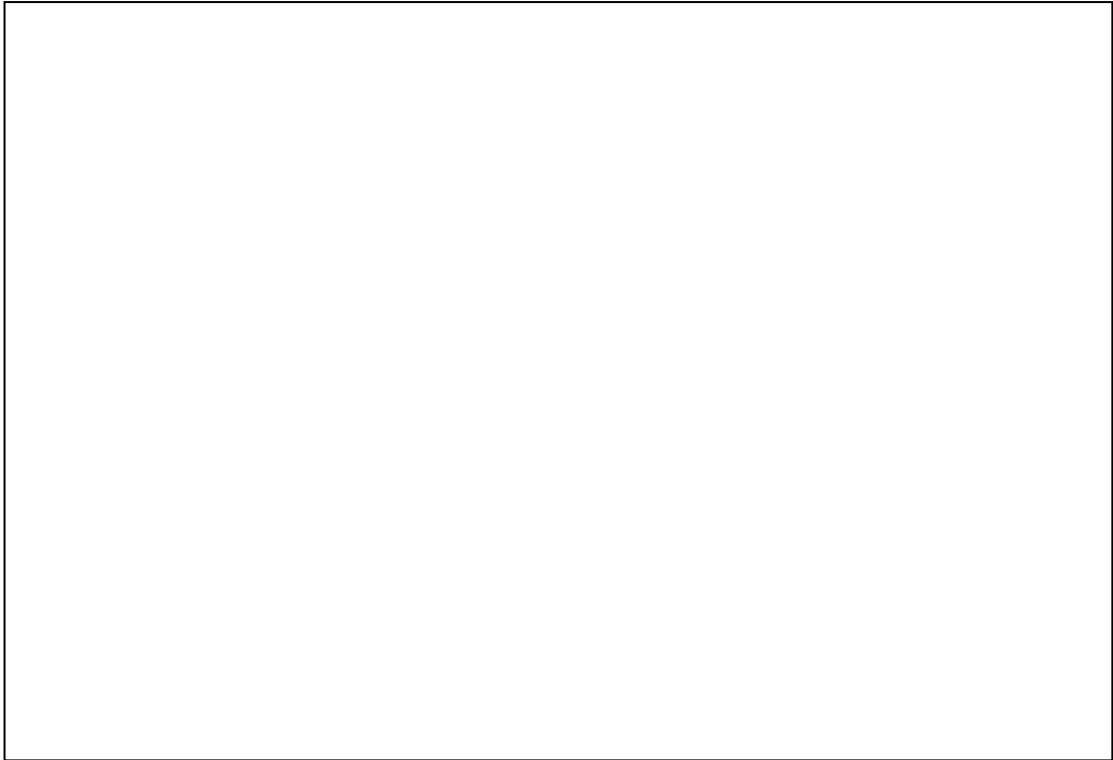
$$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + 4a_{n-3}$$
$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_3 = 20$$



סעיף ב (8 נק')

חשב את מספר המספרים הטבעיים ה-4-ספרתיים שמתחלקים ב-5 וכך שסכום הספרות הוא 17.

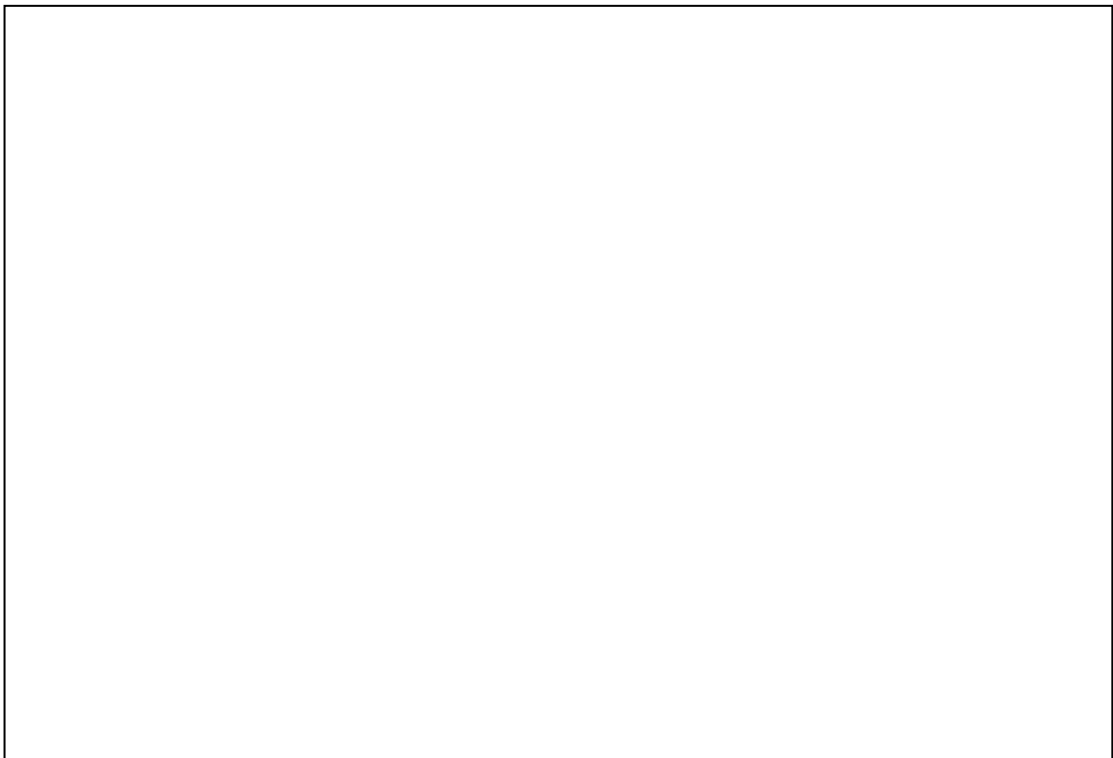




סעיף ג (10 נק')

תזכורת : גרף תחרות הוא גרף מכוון שבו לכל שני קודים  $x, y$  קיימת אחת הצלעות  $(x, y)$  או  $(y, x)$  אך לא שתיהן.

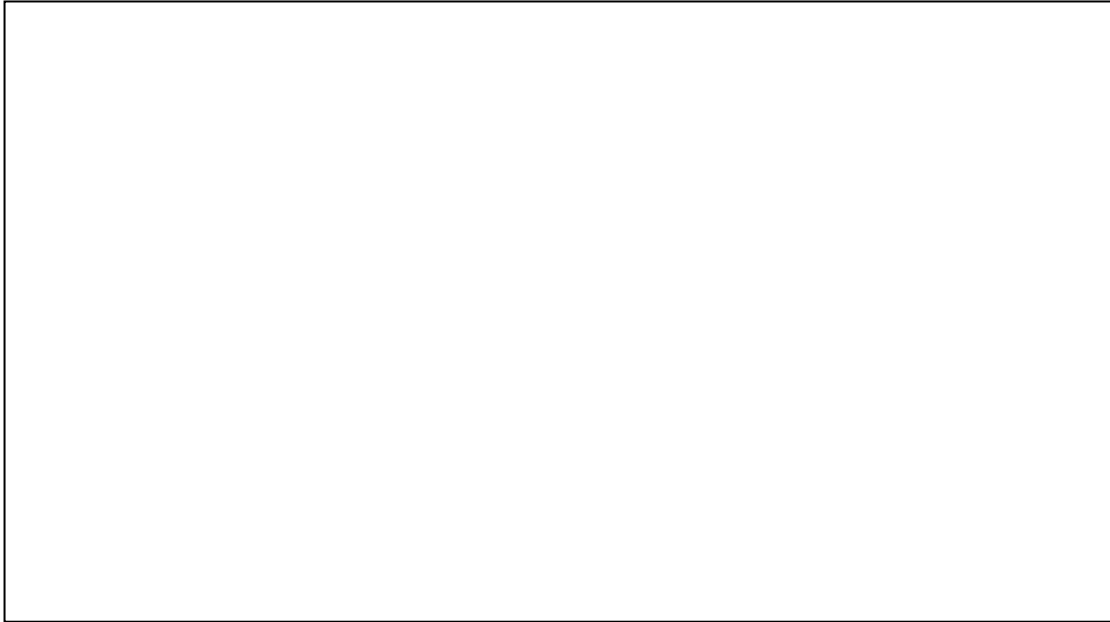
הוכח שבכל גרף תחרות  $G = (V, E)$  קיים קודקוד  $v \in V$  כך שלכל קודקוד  $u \in V$  קיים מסלול מ- $v$  ל- $u$  באורך 2 או פחות.



שאלה 4

סעיף א (7 נק')

יהי  $T = (V, E)$  עץ על  $n$  קדקודים, מהם 7 קדקודים בדרגה 3, 10 קדקודים מדרגה 5 והיתר עלים. כמה עלים בעץ?



סעיף ב (18 נק')

יהי  $G$  גרף קשיר עם סדרת דרגות  $4, 4, 4, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1$ .

1. הוכח שאין מסלול המילטון ב- $G$ .

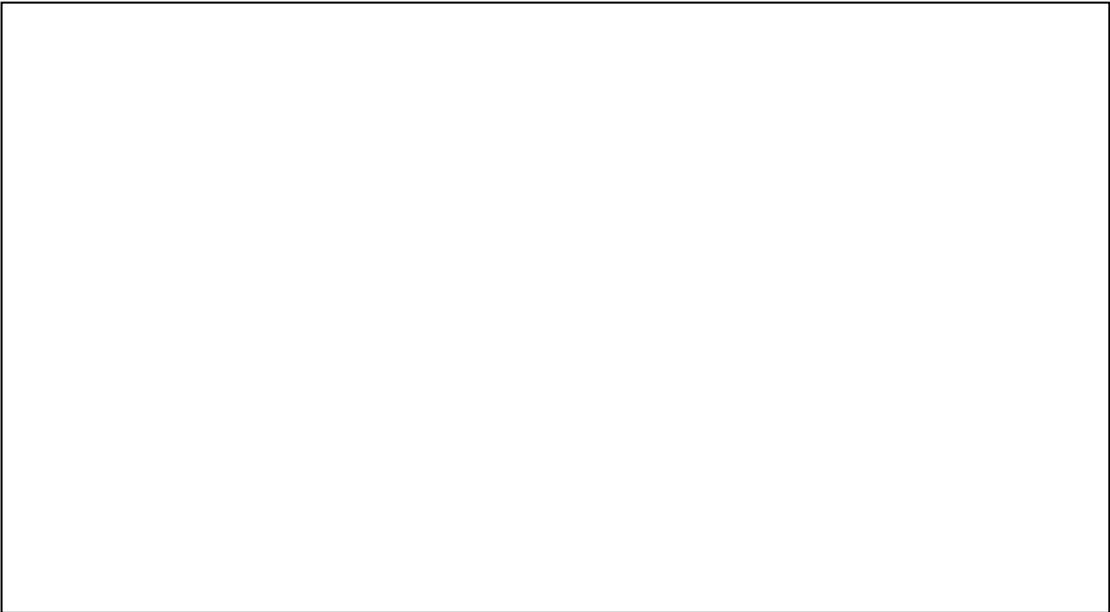




2. הוכח ש-  $G$  אינו עץ.

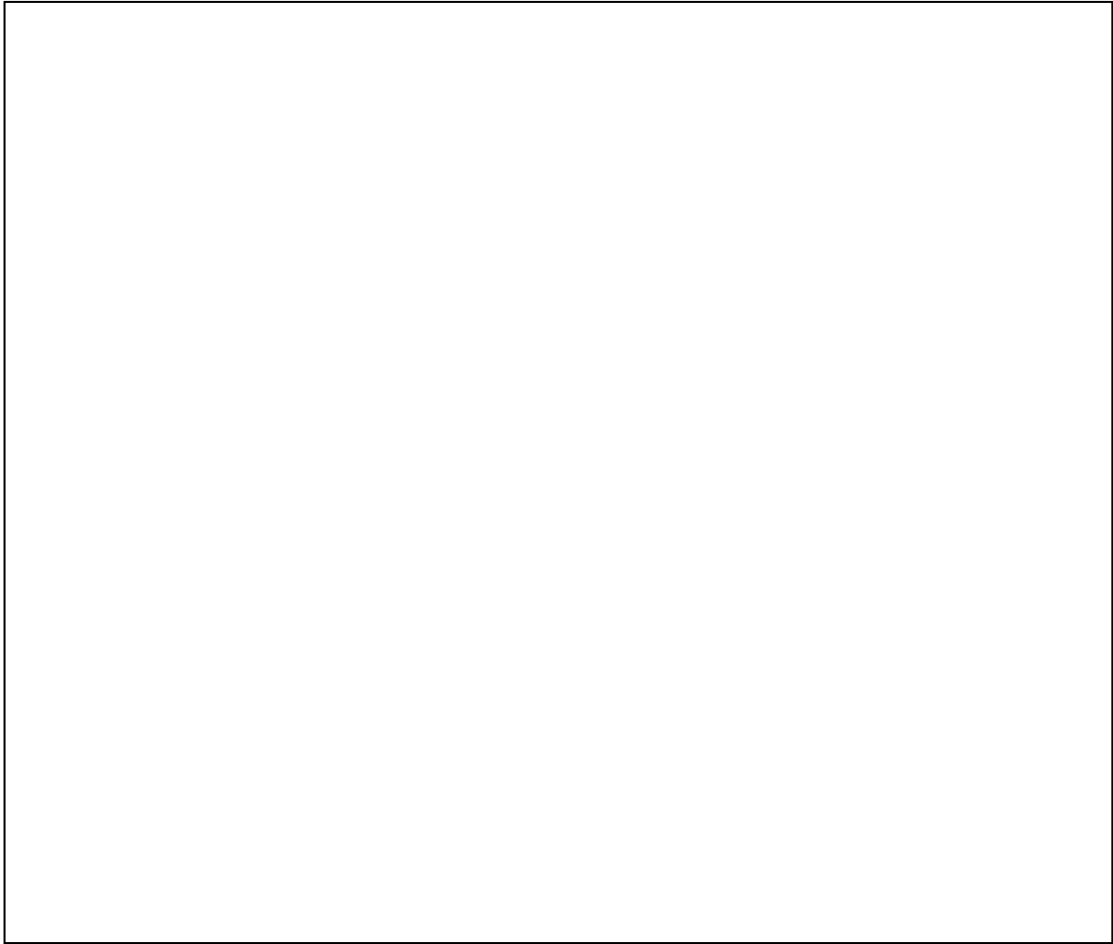


3. הוכח שהגרף המשלים  $\bar{G}$  אינו מישורי



מס' נבחן: \_\_\_\_\_

4. ידוע ש  $G$  מישורי. הוכח ש-  $G$  אינו דו-חלקי.  
(רמז: יהי  $G'$  תת-הגרף של  $G$  המושרה ע"י הקדקודים מדרגות גדולות מ-1.)



שאלה 5

סעיף א (10 נק')

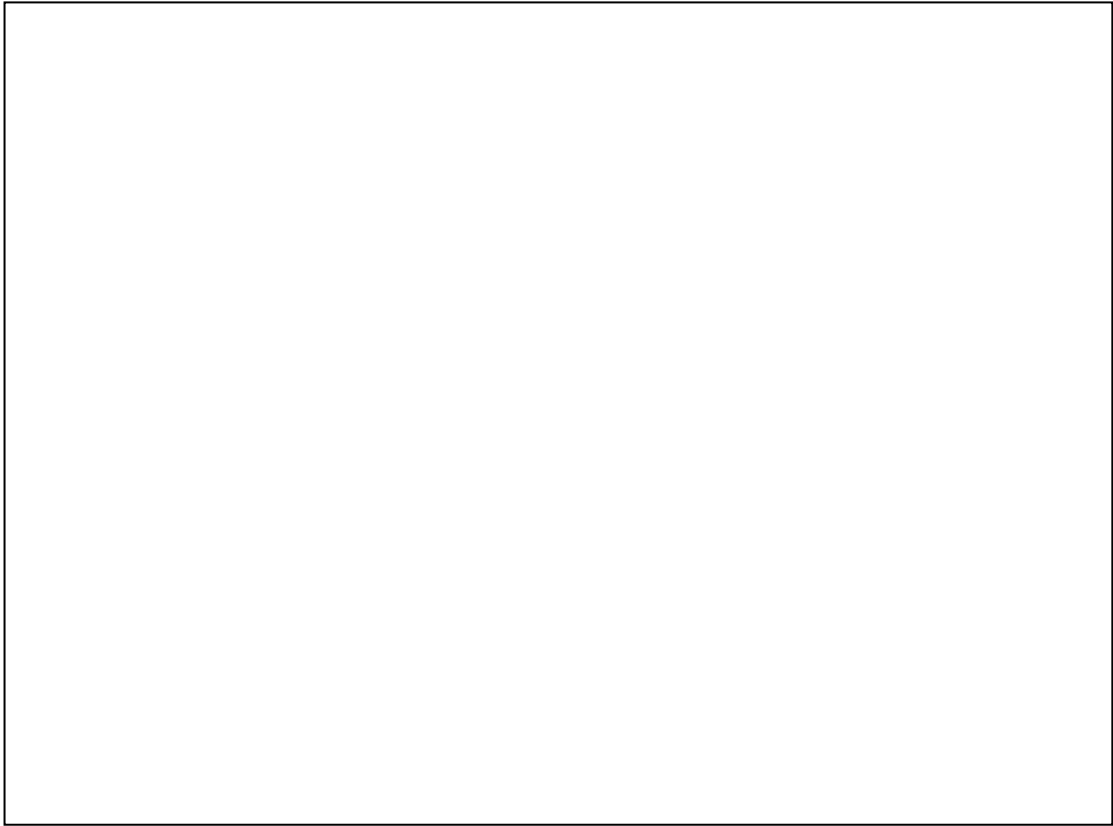
בכיתה יש 20 תלמידים. ההסתברות שתלמיד נולד בחודש מסוים זהה עבור כל חודשי השנה.  
1. מה ההסתברות שישנם 3 חודשים שבכל אחד מהם נולדו 4 מתלמידי הכיתה, 8 חודשים שבכל אחד מהם נולד תלמיד אחד וחודש שבו לא נולד אף תלמיד?



2. מה ההסתברות שגיל וגילה נולדו באותו החודש אם ידוע שאף תלמיד לא נולד בחודשי הקיץ יולי ואוגוסט ושלפחות ילד אחד נולד בספטמבר?

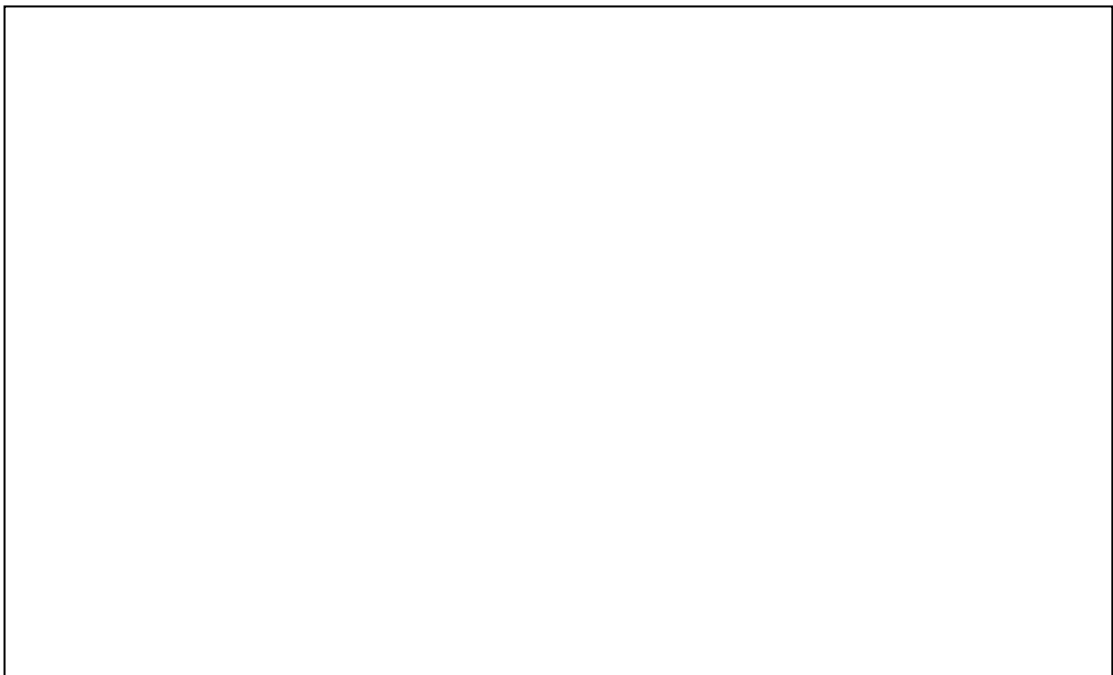


3. מה תוחלת מספר החודשים בהם נולד לפחות תלמיד אחד, אם ידוע שאף תלמיד לא נולד באפריל?



סעיף ב (8 נק')

יהי  $G = (V, E)$  גרף עם לפחות 2 קדקודים, בו לכל  $u, v \in V$  שאינם שכנים  $d(u) + d(v) \geq n - 2$ . צ"ל שב  $G - e$  שתי מסילות פשוטות זרות בקדקודים, שאיחודן הוא תת גרף פורש של  $G$ .  
הערה: מסילה כזו יכולה להיות באורך 0, כלומר קדקוד בודד.



סעיף ג (7 נק')

בשפה ההוואית 13 צלילים: 8 עיצורים ו-5 תנועות. כל הברה מורכבת באחד האופנים הבאים:

- i. תנועה בודדת (למשל "a")
- ii. עיצור ולאחריו תנועה (למשל "lo").

לדוגמא במילה Hawaii 4 הברות: Ha-wa-i-i. כל מילה הבנויה לפי כללים אלה נחשבת חוקית.

נסחו נוסחת נסיגה המתארת את מספר המילים החוקיות בשפה ההוואית בעלות n אותיות.



**בהצלחה !**