אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

בוחן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר ניימן, ד"ר סטוארט סמית
17.05.2013 9:00	טל באומל, יונתן גולדפלד, ארנולד פילצר, עמית צור, יעל שטיין
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שעתיים וחצי

<u>הנחיות חשובות:</u>

- הבוחן מורכב משני חלקים.
  בחלק א' הנכם מתבקשים לנמק את תשובותיכם, ואילו בחלק ב' הנכם מתבקשים לרשום **רק** את התשובות הסופיות.

  בחלק א' **<u>עליכם לענות על 2 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 3. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות.

  בחלק ב' **<u>עליכם לענות על 5 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 7. משקלה של כל שאלה הוא 10 נקודות.

- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו או לשאלה כלשהי, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף או השאלה.**

- רצוי לפתור את הבוחן תחילה במחברת הטיוטה ולאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת הבוחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	**א1**		**א2**		**א3**		**ב1**	**ב2**	**ב3**	**ב4**	**ב5**	**ב6**	**ב7**
ציון													

<u>סה"כ</u>	

<u>חלק א:</u> ענו על 2 מתוך 3 השאלות הבאות. <u>נמקו</u> את תשובותיכם:

<u>שאלה א1 (25%)</u>

יהי n מספר שלם חיובי.

א. (10%) תהי S קבוצת הסדרות $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ של n מספרים שלמים אי-שליליים עם התכונה שלכל i, $1 \le i \le n$, מתקיים $0 \le a_i \le i-1$. חשב את $|S|$.

פתרון:

לכל i כך ש- $1 \le i \le n$ יש i אפשרויות עבור הערך של a_i, לכן מספר הסדרות בקבוצה S הוא $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$.

ב. (15%) תהי T קבוצת הסדרות $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ של n מספרים שלמים אי-שליליים כך ש- $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le n-1$. חשב את $|T|$.

פתרון:

מספר הסדרות בקבוצה T שווה למספר המולטי-קבוצות של n מספרים שלמים בין 0 ל- $n-1$, כלומר למספר הדרכים לבחור ב- n מספרים מהקבוצה $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, עם חזרות וכאשר הסדר אינו חשוב. (אחר כך יש בדיוק דרך אחת לסדר אותם בסדר עולה.) לכן

$$|T| = \binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}.$$

<u>שאלה א2 (25%)</u>

א. (12%) למנעול יש חמישה לחצנים הממוספרים 1,2,3,4,5. על מנת לפתוח את המנעול יש להקיש סיסמא בת 10 לחיצות. ידוע שהסיסמא כוללת את כל הלחצנים. כמה סיסמאות כאלו אפשריות?

פתרון:

בסה"כ יש 5^{10} סיסמאות אפשריות בנות 10 לחיצות על הלחצנים 1,2,3,4,5.
לכל $1 \le i \le 5$ נסמן ב - A_i את קבוצת הסיסמאות האפשריות שלא כוללות את הספרה i. אם כן,

לכל $1 \le i \le 5$ - $|A_i| = 4^{10}$, לכל $1 \le i < j \le 5$ - $|A_i \cap A_j| = 3^{10}$, לכל $1 \le i < j < k \le 5$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2^{10}$

ולכל $1 \le i < j < k < l \le 5$ מתקיים $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 1^{10} = 1$.

ברור ש - $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 0$. אם כן, מעקרון ההכלה וההדחה נקבל שמספר הסיסמאות האפשריות הוא

$$5^{10} - \sum_{i=1}^{5}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le 5}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le 5}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{1\le i<j<k<l\le 5}|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| =$$
$$5^{10} - \binom{5}{1}\cdot 4^{10} + \binom{5}{2}\cdot 3^{10} - \binom{5}{3}\cdot 2^{10} + \binom{5}{4}\cdot 1 =$$
$$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{5}{k}(5-k)^{10}$$

ב. (13%) הוכח את הזהות הבאה בדרך קומבינטורית **(הוכחה בדרך אחרת לא תתקבל)**:

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}$$

פתרון:

<u>דרך 1:</u>

רוצים לבחור ועדה בגודל k מתוך כתה בגודל n, שבה לפחות אחד מבין: Z,Y,X נמצאים.

אגף שמאל מבטא את כל האפשרויות, פחות האפשרויות שבהן Z,Y,X אינם בועדה.

אגף ימין מבטא את כל האפשרויות בהן X בועדה + כל האפשרויות בהן X לא ו - Y כן בועדה + כל האפשרויות בהן X ו - Y לא ו - Z כן בועדה. נשים לב שאלה הן שלוש קבוצות זרות של דרכי בחירה, והאיחוד שלהן כולל את כל הבחירות בהן לפחות אחד מבין: Z,Y,X נמצאים.

<u>דרך 2:</u> רוצים לבנות מילה בינארית באורך n, בת k אחדות ו – n-k אפסים, כך שלפחות אחת הספרות מתוך הרישא בגודל שלוש (3 הספרות השמאליות) תהיה הספרה 1.

אגף שמאל מבטא את כל האפשרויות, פחות האפשרויות בהן הרישא היא 000.

אגף ימין מבטא את האפשרויות בהן הרישא מתחילה ב – 1 + האפשרויות בהן הרישא מתחילה ב – 01 + האפשרויות בהן הרישא מתחילה ב – 001. שוב, נשים לב כי אלה הן שלוש קבוצות זרות של מלים, והאיחוד שלהן כולל את כל המלים באורך n שלפחות אחת הספרות מתוך הרישא בגודל שלוש היא 1.

שאלה א3 (25%)

א. (12%) הוכח את הזהות הבאה בדרך קומבינטורית **(הוכחה בדרך אחרת לא תתקבל)**:

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

פתרון:

נניח שיש לנו $k+1$ אפסים ו- $n-k+1$ אחדות לסדר בשורה. אגף ימין זו הנוסחה הישירה לחישוב זה. נבחן את אגף שמאל: בכל בחירה נסתכל על ה- 0 הימני ביותר. הוא יופיע באחד המקומות מבין המקום ה- $k+1$ ל- $n+1$. נסמן ב- $j+1$ את המקום שבו ה- 0 הימני ביותר מופיע, כאשר $0\le j\le k$ (זו הסכימה באגף שמאל).

נתון j, אפשר לחשב את מספר הסדרות המתאימות ל- j בדרך הבאה: יש $\binom{j}{k}$ דרכים לבחור ב- k המקומות מתוך j המקומות הראשונים שבהם יופיעו אפסים. האיבר במקום ה- $k+1$ הוא גם 0, ושאר האיברים בסדרה הם אחדות. לכן מספר הסדרות שמקיימות את הנתונים כך שה- 0 הימני ביותר מופיע במקום ה- $k+1$ הוא $\binom{j}{k}$, והסכימה מעל כל האפשרויות עבור j היא הביטוי באגף שמאל.

ב. (13%) בוחרים 45 מספרים מתוך 1,2,...,80 (ללא חזרות). הוכח כי יש ביניהם שניים שהפרשם בדיוק 9.

פתרון:

היו 3 פתרונות נכונים, כולם בעזרת עיקרון שובך היונים:

- התאים יהיו 89 הערכים 1,2, ... ,89.
היונים יהיו הקבוצה הבאה: $x_1,x_2,\dots,x_{45},\ \ x_1+9,x_2+9,\dots,x_{45}+9$, כאשר $x_1,\dots,x_{45}$ הם קב' המס' שנבחרו. סה"כ יש 90 יונים, שמשויכות ל-89 הערכים האפשריים שלהם, ולכן בהכרח יהיה שובך אחד לפחות שאליו משויכות שתי יונים, מהצורה: x_i, x_j+9, כלומר: $x_i=x_j+9$, ובמילים אחרות, ההפרש בין x_i ל- x_j הוא בדיוק 9.
- התאים יהיו 36 הזוגות **הזרים** הבאים: $\left\{\begin{matrix}(1,10),(2,11),\dots,(9,18)\\(19,28),(20,29),\dots,(27,36)\\(37,46),\dots,(45,54)\\(55,64),\dots,(63,72)\end{matrix}\right\}$ ועוד 8 תאים עבור המס' הבודדים שלא שובצו באף זוג: 73,74, ... ,80.
היונים יהיו 45 המס' שנבחרו. סה"כ יש 45 יונים, 44 שבכים, ולכן יש שובך שאליו שובצו שתי יונים. זהו זוג מס' שהפרשם בדיוק 9.
- התאים יהיו שאריות החלוקה האפשריות ב-9: 0,1, ... ,8. סה"כ 9 שבכים. אליהם נתאים את 45 המספרים (היונים) לפי שארית החלוקה ב-9.
לכן בכל תא יש בדיוק 5 יונים, או שיש תא עם לפחות 6 יונים. אם בכל תא יש בדיוק 5 יונים: נתבונן בתא שמייצג את שארית החלוקה ב-0, המספרים שיכולים היו להשתבץ לשם הם: 9,18,27,36,45,54,63,72. בדיוק 8 מספרים. כיוון שיש בדיוק 5 מספרים ששויכו בפועל

לתא זה, בוודאות יש שניים שהפרשם 9 (לא יכול להיות 5 מספרים שנבחרו, וברווחים ביניהם עוד 4 מספרים לפחות שלא נבחרו).
אחרת, יש תא שאליו משויכים לפחות 6 מס', אך בכל תא יכולים היו להשתבץ לכל היותר 9 מס' בין 1 ל-80, ומאותו טיעון, בבחירת 6 מתוך 9 המס' האפשריים, מתחייב שיש שניים עם הפרש בדיוק 9.

<u>חלק ב:</u> ענו על 5 מתוך 7 השאלות הבאות. כתבו <u>תשובה סופית</u> בלבד:

<u>שאלה ב1 (10%)</u>

בקולנוע מוכרים כרטיסים לסרט ערב. מחיר כרטיס הוא 50 ₪. 100 אנשים מעוניינים לצפות בסרט, כאשר לשישים מתוכם יש שטר של 50 ₪ כל אחד ולארבעים הנותרים יש שטר של 100 ₪ כל אחד. בכמה אופנים ניתן לסדר את האנשים בטור לקופה כך שכל אחד יוכל לקבל עודף (במידת הצורך)? הנח שבתחילת הערב הקופה ריקה.

פתרון:

כפי שראינו בעבודת הבית, מספר הסדרות של s אפסים ו t – אחדות, כאשר $t \le s$, כך שבשום רישא מספר האחדות לא עובר את מספר האפסים, הוא $\binom{s+t}{s}\left(1-\frac{t}{s+1}\right)=\binom{s+t}{s}-\binom{s+t}{t-1}$.

אם נתייחס לאנשים כזהים, הרי שהבעיה (מספר האופנים לסדר את השטרות בטור) שקולה לבעיית מספר הסדרות עם s אפסים ו t – אחדות, כאשר $t=40$, $s=60$. לכן יש $\binom{100}{60}-\binom{100}{39}$ אפשרויות לסידור השטרות. נוסיף את מספר הסידורים הפנימיים של האנשים (היות והאנשים שונים זה מזה), ונקבל:

<u>תשובה סופית</u>: $\left(1-\frac{40}{61}\right)\cdot\binom{100}{60}\cdot 60!\cdot 40! = \left[\binom{100}{60}-\binom{100}{39}\right]\cdot 60!\cdot 40!$.

<u>שאלה ב2 (10%)</u>

פתור את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$f(0)=1; \quad f(1)=11$$
$$f(n)=f(n-1)+12f(n-2)$$

פתרון:

המשוואה האופיינית: $x^2-x-12=0$, שורשיה הם (-3), 4, כל אחד מריבוי אחד,

ולכן $f(n)=A\cdot 4^n+B\cdot(-3)^n$. כעת, מתקיים: $\begin{matrix} f(0)=1=A+B \\ f(1)=11=4A-3B \end{matrix}$, מפתרון שתי המשוואות מקבלים: $A=2\,, B=-1$, ולכן $f(n)=2\cdot 4^n-(-3)^n$.

<u>שאלה ב3 (10%)</u>

בגן ילדים מסוים יש n ילדים. במסיבת סוף השנה משתתפים כל הילדים והוריהם (סה"כ $3n$ אנשים, לא כולל הגננת). כל המשתתפים (חוץ מהגננת) אמורים לשבת במעגל גדול. (אין קשר בין שני הסעיפים.)

א. בכמה דרכים אפשר לסדר את האנשים כך שכל ילד יושב בין שני הוריו? (כלומר, כל ילד יושב גם ליד אמו וגם ליד אביו.)

ב. בכמה דרכים אפשר לסדר את האנשים כך שאף אחד מהאבות לא יישב ליד אשתו?

פתרון:

כל משפחה (של שלושה אנשים) תופסת שלושה מקומות ברצף, אז קודם כל נסדר את המשפחות. יש n משפחות, לכן יש $(n-1)!$ דרכים לסדר אותן במעגל. בכל משפחה, יש שתי דרכים לסדר את כולם כך שהילד יישב בין שני הוריו. אז התשובה היא $2^n \cdot (n-1)!$.

א. נמספר את האבות מ- 1 עד n. נגדיר n תכונות $a_1, a_2, \cdots, a_n$ של סידור באופן הבא: התכונה a_i היא שהאבא מספר i יושב ליד אשתו. התשובה תהיה e_0, כמו שמוגדר בנוסחת ההכלה ודחייה. קודם כל נחשב את s_0 עד s_n.

$$s_0 = (3n-1)!$$

$$s_1 = \sum_{1\le i\le n} N(a_i) = \sum_{1\le i\le n} 2\cdot(3n-2)! = \binom{n}{1}\cdot 2\cdot(3n-2)!$$

$$s_2 = \sum_{1\le i<j\le n} N(a_i a_j) = \sum_{1\le i<j\le n} 2^2\cdot(3n-3)! = \binom{n}{2}\cdot 2^2\cdot(3n-3)!$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$s_n = N(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \binom{n}{n}\cdot 2^n\cdot(2n-1)!$$

לכן

$$e_0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} 2^j (3n-1-j)!$$

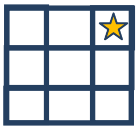
<u>שאלה ב4 (10%)</u>

בכמה דרכים ניתן לתת עודף של n שקלים, כאשר ניתן להשתמש במטבעות של ½, 1,2,5,10 תחת האילוצים הבאים: ברשותנו 2 מטבעות של חצי שקל, 4 מטבעות של שקל, 4 מטבעות של 2 שקלים, מספר לא מוגבל של חמישיות ועשיריות, ומספר המטבעות של ½ שקל חייב להיות זוגי.
מצא ביטוי סגור (ללא סיגמא).

פתרון:

מקבלים פונקציה יוצרת של $1+x$ עבור חצאי השקלים,
$1+x+x^2+x^3+x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$ עבור השקלים,
$1+x^2+x^4+x^6+x^8 = \frac{1-x^{10}}{1-x^2}$ עבור המטבעות של 2 שקלים,
$\frac{1}{1-x^5}$ עבור החמישיות,
$\frac{1}{1-x^{10}}$ עבור העשיריות.
סה"כ יוצא $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, לכן התשובה היא $a(n)=n+1$.

שאלה 5ב (10%)



בהינתן לוח איקס עיגול סטנדרטי, יהי a(n) מספר סדרות הצעדים האפשריות באורך n כאשר מתחילים בריבוע הימני העליון (המסומן בכוכב), וכל צעד הינו למשבצת סמוכה (לא באלכסון).

נסח נוסחת נסיגה (עם תנאי התחלה) עבור a(n).

(אין צורך לפתור את הנוסחה. הנוסחה תהיה תלויה ב- a( ) בלבד.)

פתרון:

נגדיר סדרות נוספות: c(n)=מס' סדרות הצעדים האפשריות באורך n כאשר מתחילים במשבצת האמצעית של הלוח. b(n)=מס' סדרות הצעדים האפשריות באורך n כאשר מתחילים במשבצת אמצעית עליונה או תחתונה, או במשבצת אמצעית ימנית או שמאלית. כמובן שמטעמי סימטריה a(n)=מס' סדרות הצעדים האפשריות באורך n כאשר מתחילים באחת הפינות.

אז: $\begin{cases} a(n) = 2 \cdot b(n-1) \\ b(n) = 2 \cdot a(n-1) + c(n-1) \\ c(n) = 4 \cdot b(n-1) \end{cases}$. באיחוד המשוואות מקבלים: $a(n) = 8 \cdot a(n-2)$.

תנאי ההחלה הם: $a(1) = 2\ ,\ a(2) = 6$.

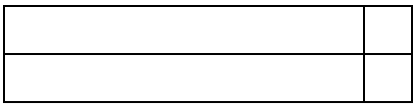
(שימו לב שלמרות שרגילים שבאופן ריק $a(0) = 1$, כאן זה לא נכון!)

שאלה 6ב (10%)

נתונות אבני דומינו בגדלים 2×2, 2×1, כאשר האבנים מגודל 2×1 יכולות להגיע בצבע אדום כחול או שחור וניתן להניחן במצב אנכי או במצב אופקי, והאבנים מגודל 2×2 בצבע שחור בלבד. יהי a(n) מספר האפשרויות השונות שישנן למלא לוח מגודל $2 \times n$. מצא נוסחת נסיגה (עם תנאי התחלה) עבור a(n). (אין צורך לפתור את הנוסחה. הנוסחה תהיה תלויה ב- a( ) בלבד.)

פתרון:

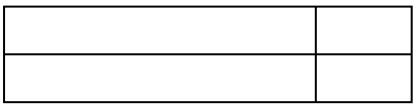
נסתכל על העמודה הימנית ביותר של לוח מגודל $2 \times n$ ונעבור על כל הדרכים לכסות אותה באבני הדומינו הנתונים כדי לבנות נוסחת נסיגה:



יש 3 דרכים לכסות את העמודה האחרונה באבן אחת מסדר 2×1 כמו בציור, משום שיש 3 אפשרויות עבור צבע האבן.

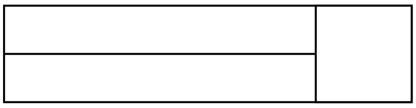
יש a_{n-1} דרכים לכסות את $n-1$ העמודות הראשונות.

לכן יש $3a_{n-1}$ אפשרויות מהצורה הזאת.



יש 3 דרכים לכסות את שתי המשבצות האחרונות בשורה הראשונה באבן אחת מסדר 2×1. לכל אחת מהן עלינו לכסות את שתי המשבצות האחרונות בשורה השנייה באבן מסדר 2×1. יש a_{n-2} דרכים לכסות את $n-2$ העמודות הראשונות.

לכן יש $9a_{n-2}$ אפשרויות מהצורה הזאת.



יש דרך אחת לכסות את העמודה האחרונה באבן מסדר 2×2, והיא גם תכסה את העמודה לפני האחרונה.
יש a_{n-2} דרכים לכסות את $n-2$ העמודות הראשונות.
לכן יש a_{n-2} אפשרויות מהצורה הזאת.

אזי נוסחת הנסיגה היא $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$ לכל $n \ge 3$. תנאי ההתחלה הם: $a_1 = 3$ ו- $a_2 = 19$.
אפשר מכאן להסיק שאם נקבע ש- $a_0 = 1$ אז נוסחת הנסיגה תהיה תקפה לכל $n \ge 2$.

<u>שאלה ב7(10%)</u>

בכיתה ישנם 7 בנים (אבנר, בני, גלעד, דוד, הראל, וולטר וזיו) ו- 3 בנות (אסתי, בתיה וגילה).

א. בכמה דרכים ניתן להושיבם בשורה כך שהבנות תשבנה ביחד?
ב. בכמה דרכים ניתן להושיבם בשורה כך שלא תהיינה שתי בנות סמוכות?
ג. בכמה דרכים ניתן להושיבם במעגל כך שלא תהיינה שתי בנות סמוכות?

פתרון:

א. נאחד את כל הבנות לאיבר בודד לכן ונסדר את 8 האיברים בשורה ($8!$)
וכעת צריך להכפיל בכל הסידורים הפנימיים של הבנות ($3!$) סה"כ: $8!\,3!$
ב. נסדר את הבנים בשורה ואז נבחר 3 רווחים (מתוך 8) שבין הבנים,
עבור הבנות: $7!\frac{8!}{(8-3)!}$
ג. נסדר את הבנים במעגל ואז נבחר 3 רווחים (מתוך 7) בין הבנים
$6!\frac{7!}{(7-3)!}$