

אוניברסיטת בן-גוריון המחלקה למדעי המחשב

פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית	בוהן במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061
טל באומל, יונתן גולדפלד, ארנוולד פילצר, עמית צור, יעל שטיין	17.05.2013 9:00
אסור	חומר עזר
שעתיים וחצי	משך הבחינה

הנחיות חשובות:

- הבוחן מורכב משני חלקים.
בחלק א' הנכם מתבקשים לנמק את תשובותיכם, ואילו בחלק ב' הנכם מתבקשים לרשום רק את התשובות הסופיות.
- בחלק א' עליכם לענות על 2 שאלות בלבד מתוך ה – 3. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות.
- בחלק ב' עליכם לענות על 5 שאלות בלבד מתוך ה – 7. משקלה של כל שאלה הוא 10 נקודות.
- במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו או לשאלה כלשהי, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף או השאלה.
- רצוי לפתור את הבוחן תחילה במחברת הטיוטה ולאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. בדיקת הבוחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.

בהצלחה !

שאלה	א1	א2	א3	ב1	ב2	ב3	ב4	ב5	ב6	ב7
ציון										

<u>סה"כ</u>	
-------------	--

חלק א: ענו על 2 מתוך 3 השאלות הבאות. נמקו את תשובותיכם:

שאלה א1 (25%)


יהי n מספר שלם חיובי.

א. (10%) תהי S קבוצת הסדרות (a_1, a_2, \dots, a_n) של n מספרים שלמים אי-שליליים עם התכונה שלכל $i, 1 \leq i \leq n$, מתקיים $0 \leq a_i \leq i - 1$. חשב את $|S|$.

ב. (15%) תהי T קבוצת הסדרות (a_1, a_2, \dots, a_n) של n מספרים שלמים אי-שליליים כך ש- $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq n - 1$. חשב את $|T|$.

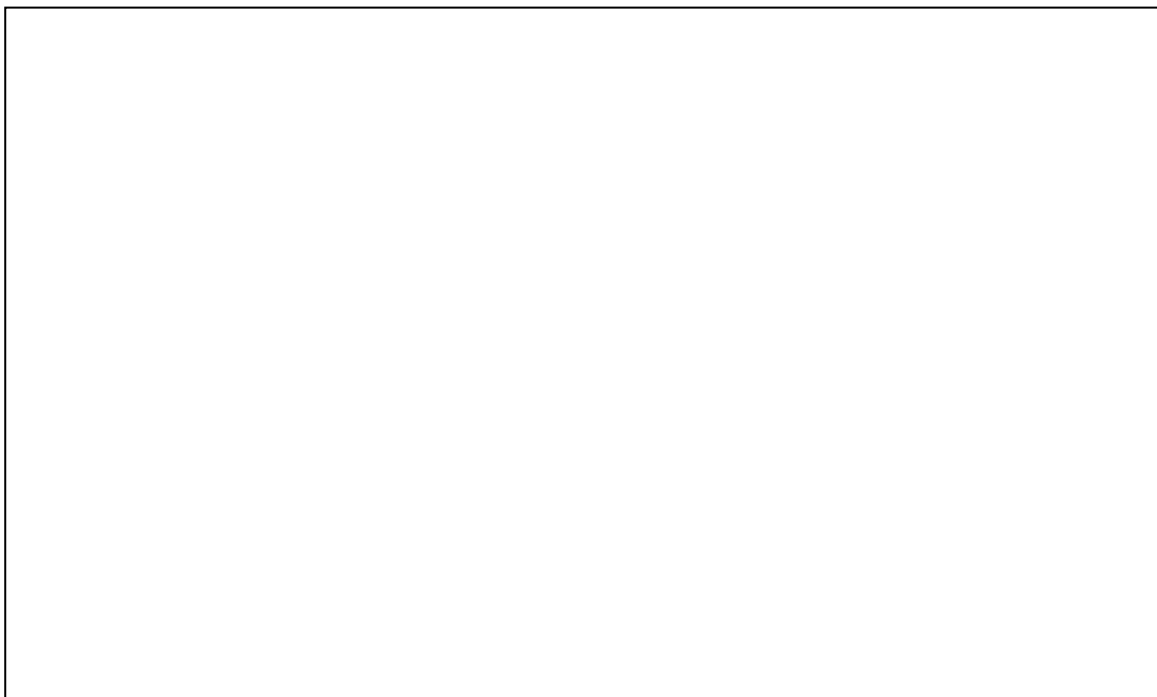
שאלה 2 א (25%)

א. (12%) למנעול יש חמישה לחצנים הממוספרים 1,2,3,4,5. על מנת לפתוח את המנעול יש להקיש סימא בת 10 לחיצות. ידוע שהסימא כוללת את כל הלחצנים. כמה סימאות כאלו אפשריות?



ב. (13%) הוכח את הזהות הבאה בדרך קומבינטורית (הוכחה בדרך אחרת לא תתקבל):

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}$$



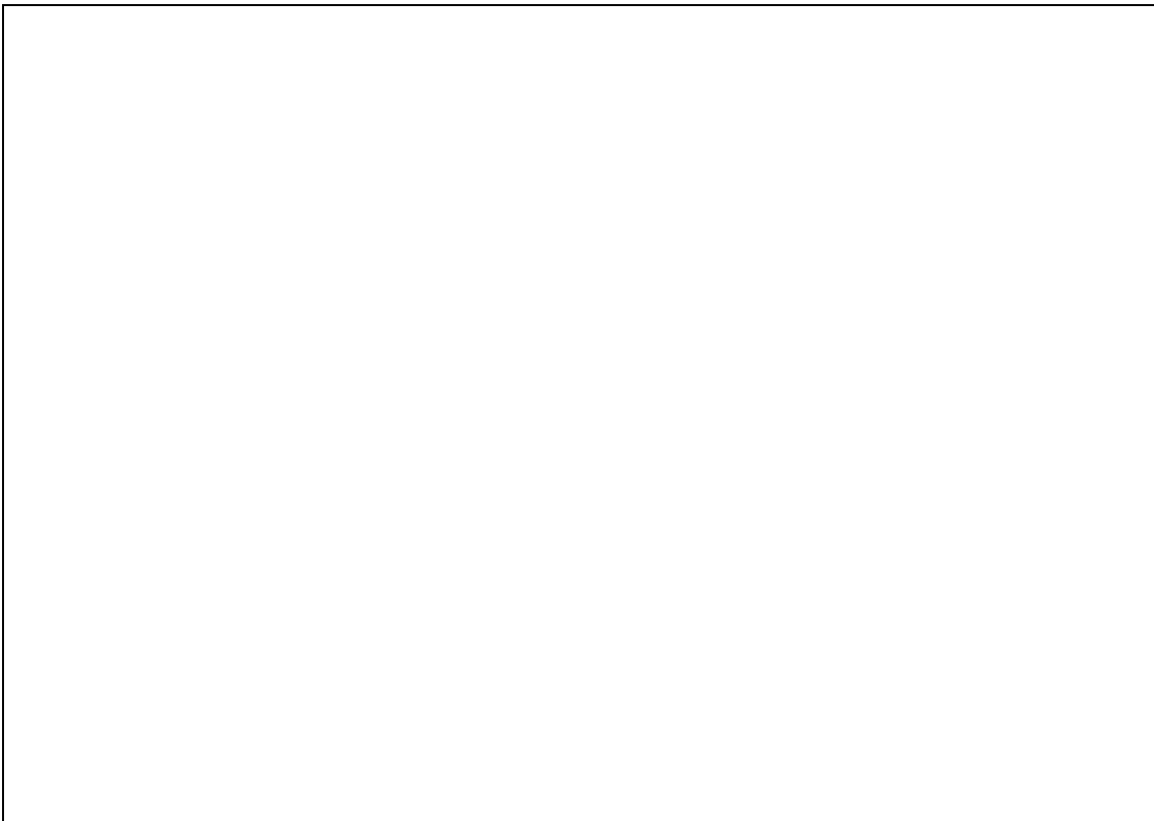
שאלה 3 א (25%)

א. (12%) הוכח את הזהות הבאה בדרך קומבינטורית (הוכחה בדרך אחרת לא תתקבל):

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$



ב. (13%) בוחרים 45 מספרים מתוך $80, \dots, 2, 1$ (ללא חזרות). הוכח כי יש ביניהם שניים שהפרשם בדיוק 9.



חלק ב: ענו על 5 מתוך 7 השאלות הבאות. כתבו תשובה סופית בלבד:

שאלה ב1 (10%)

בקולנוע מוכרים כרטיסים לסרט ערב. מחיר כרטיס הוא 50 ₪. 100 אנשים מעוניינים לצפות בסרט, כאשר לשישים מתוכם יש שטר של 50 ₪ כל אחד ולארבעים הנותרים יש שטר של 100 ₪ כל אחד. בכמה אופנים ניתן לסדר את האנשים בטור לקופה כך שכל אחד יוכל לקבל עודף (במידת הצורך)? הנה שבתחילת הערב הקופה ריקה.

שאלה ב2 (10%)

פתור את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 11$$
$$f(n) = f(n-1) + 12f(n-2)$$

שאלה ב3 (10%)

בגן ילדים מסוים יש n ילדים. במסיבת סוף השנה משתתפים כל הילדים והוריהם (סה"כ $3n$ אנשים, לא כולל הגננת). כל המשתתפים (חוץ מהגננת) אמורים לשבת במעגל גדול. (אין קשר בין שני הסעיפים.)

א. בכמה דרכים אפשר לסדר את האנשים כך שכל ילד יושב בין שני הוריו? (כלומר, כל ילד

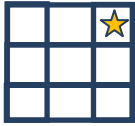
יושב גם ליד אמו וגם ליד אביו.)

ב. בכמה דרכים אפשר לסדר את האנשים כך שאף אחד מהאבות לא יישב ליד אשתו?

שאלה 4 (10%)

בכמה דרכים ניתן לתת עודף של n שקלים, כאשר ניתן להשתמש במטבעות של $1, 2, 5, 10$, $\frac{1}{2}$ תחת האילוצים הבאים: ברשותנו 2 מטבעות של חצי שקל, 4 מטבעות של שקל, 4 מטבעות של שקל, 4 מטבעות של 2 שקלים, מספר לא מוגבל של חמישיות ועשיריות, ומספר המטבעות של $\frac{1}{2}$ שקל חייב להיות זוגי. מצא ביטוי סגור (ללא סיגמא).

שאלה 5 (10%)



בהינתן לוח איקס עיגול סטנדרטי, יהי $a(n)$ מספר סדרות הצעדים האפשריות באורך n כאשר מתחילים בריבוע הימני העליון (המסומן בכוכב), וכל צעד הינו למשבצת סמוכה (לא באלכסון). נסח נוסחת נסיגה (עם תנאי התחלה) עבור $a(n)$. (אין צורך לפתור את הנוסחה. הנוסחה תהיה תלויה ב- $a()$ בלבד.)

שאלה 6 (10%)

נתונות אבני דומינו בגדלים 2×2 , 2×1 , 1×2 , כאשר האבנים מגודל 2×1 יכולות להגיע בצבע אדום כחול או שחור וניתן להניחן במצב אנכי או במצב אופקי, והאבנים מגודל 2×2 בצבע שחור בלבד. יהי $a(n)$ מספר האפשרויות השונות שישנן למלא לוח מגודל $2 \times n$. מצא נוסחת נסיגה (עם תנאי התחלה) עבור $a(n)$. (אין צורך לפתור את הנוסחה. הנוסחה תהיה תלויה ב- $a()$ בלבד.)

שאלה ב7(10%)

בכיתה ישנם 7 בנים (אבנר, בני, גלעד, דוד, הראל, וולטר וזיו) ו-3 בנות (אסתי, בתיה וגילה).

- א. בכמה דרכים ניתן להושיבם בשורה כך שהבנות תשבנה ביחד?
- ב. בכמה דרכים ניתן להושיבם בשורה כך שלא תהיינה שתי בנות סמוכות?
- ג. בכמה דרכים ניתן להושיבם במעגל כך שלא תהיינה שתי בנות סמוכות?