אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מועד א' במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטיוארט סמית
03.07.13 09:00	טל באומל, יונתן גולדפלד, ארנולד פילצר, עמית צור, יעל שטיין
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

<u>הנחיות חשובות:</u>

- המבחן כולל 5 שאלות, **<u>עליכם לענות על 4 שאלות בלבד</u>** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות.יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט כל משפט שנלמד בכיתה, אלא אם נתבקשתם להוכיח אותו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. <u>לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף</u>.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **<u>בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.</u>**

בהצלחה !

שאלה	1א	1ב	2א	2ב	3א	3ב	3ג	4א	4ב	5א	5ב	5ג
ציון												

מס' נבחן:______________

שאלה 1:

סעיף א (15 נקודות):

הוכיחו כי לכל n טבעי, מספר הסדרות המאוזנות עם n אפסים ו-n אחדים הוא $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

הוכח בכיתה

<u>סעיף ב (10 נקודות)</u>:

נתונה קבוצה A של 10 מספרים שלמים חיוביים בני 2 ספרות, הוכיחו כי ישנן שתי תתי-קבוצות **זרות** של A כך שסכום האיברים בראשונה שווה לסכום האיברים בשנייה.

יש $2^{10} = 1024$ תתי קבוצות אפשריות, וסכום האיברים בכל תת-קבוצה הוא מספר בין 0 ל 99*10=990, לכן מעקרון שובך יונים בהכרח יש 2 תתי קבוצות A,B עם אותו סכום.

נשים לב כי A,B לא בהכרח זרות, אבל ניתן להוציא את האיברים ב $A \cap B$ מכל אחת מהן, ועדיין סכומן יהיה כמובן זהה.

מס' נבחן:____________

שאלה 2 :

סעיף א (15 נקודות):

נביט בסדרות מאורך n מעל {0,1,2}. בכמה מן הסדרות מספר האפסים זוגי? (הציגו פתרון מפורש, לא סכום).

נסמן ב-a_n את מספר הסדרות מאורך n מעל {0,1,2} בהן מספר האפסים זוגי, וב-b_n את מספר הסדרות מאורך n מעל {0,1,2} בהן מספר האפסים אי-זוגי. נרשום נוסחת נסיגה: עבור הסדרות עם מספר זוגי של אפסים: אם הסדרה מתחילה ב-0 יש b_{n-1} דרכים להשלים אותה לסדרה מאורך n, ואם היא מתחילה ב-1 או ב-2 יש a_{n-1} דרכים להשלימה. לכן $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$, ומשיקולים סימטריים גם $b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1}$. נציב את $b_{n-1} = a_n - 2a_{n-1}$ במשוואה השנייה ונקבל

$$a_{n+1} - 2a_n = 2a_n - 4a_{n-1} + a_{n-1}$$

נפשט ונקבל את נוסחת הנסיגה $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$. תנאי ההתחלה הם $a_0 = 1, a_1 = 2$.

כדי לפתור, המשוואה האופיינית היא $x^2 - 4x + 3 = 0$, הפתרונות הם x=3,1. נשתמש בתנאי הבסיס כדי למצוא את הצירוף הלינארי המתאים

$$a + b = 1$$
$$3a + b = 2$$

פותרים ומקבלים $a = b = \frac{1}{2}$, ולכן $a_n = \frac{3^n+1}{2}$.

פתרון אחר: מלבד הסדרה שכולה 2, נוכיח כי בבדיוק חצי מהסדרות יש מספר זוגי של אפסים : נביט בסדרות עם k איברים שהם 2, וברגע שקבענו את המיקומים של ה-2, לבחור את ה-0,1 שקול לבחירת קבוצת מיקומים עבור ה-0 מתוך n-k איברים, וראינו בכיתה שמספר תתי הקבוצות מגודל זוגי שווה למספר הקבוצות מגודל אי-זוגי. כיוון שזה נכון לכל k<n ולכל בחירת מיקומים, בחצי מבין $3^n - 1$ הסדרות האלו יש מספר זוגי של אפסים.

לכן התשובה היא $\frac{3^n+1}{2} = \frac{3^n-1}{2} + 1$

<u>סעיף ב (10 נקודות)</u>:

פתרו את נוסחת הנסיגה $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$, $a_0 = 0$.

נשתמש בפונקציה יוצרת לסדרה F(x):

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 3^n) x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$$

$$= 2xF(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n - 1$$

$$F(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} - \frac{1}{1-2x} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-2x} = 3\left(\frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x}\right)$$

$$= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right)$$

כלומר המקדם של x^n, שהוא הפתרון לנוסחת הנסיגה, הוא $a_n = 3(3^n - 2^n)$.

מס' נבחן:______________

שאלה 3:

נאמר שגרף לא-מכוון G=(V,E) הוא **χ-מינימלי** אם לכל צלע $e \in E$, המספר הכרומטי של הגרף $G' = G\backslash\{e\}$ המתקבל ע"י הסרת הצלע e הוא קטן ממש מהמספר הכרומטי של G: $\chi(G') < \chi(G)$.

סעיף א (5 נקודות):

הראו שאם G=(V,E) הוא χ-מינימלי אזי $\chi(G') = \chi(G) - 1$ (כאשר $G' = G\backslash\{e\}$ ו $e \in E$ צלע כלשהי).

ברור מההגדרה ש: $\chi(G') \le \chi(G) - 1$, נניח בשלילה כי $\chi(G') < \chi(G) - 1$, אזי היינו יכולים לצבוע את G ב $\chi(G) - 1$ צבעים על ידי שימוש בצביעה של G' עם $\chi(G) - 2$ צבעים, והחלפת צבע של אחד מקודקודי הקשת e שהסרנו בצבע חדש. קל לראות כי זו צביעה חוקית, וזו סתירה.

סעיף ב (10 נקודות):

הוכיחו שלכל מספר שלם חיובי n קיים גרף χ- מינימלי G=(V,E) כך ש- $\chi(G) = n$.

ניקח למשל את הגרף השלם K_n , הוא אכן מקיים $\chi(G) = n$, וכל צלע e={u,v} שנשמיט ממנו תותיר גרף שהוא (n-1)-צביע: ניתן לצבוע כל קודקוד מלבד u,v בצבע משלו, ואת u,v באותו הצבע.

מס' נבחן:_____________

<u>סעיף ג (10 נקודות)</u>:

יהי G=(V,E) גרף לא-מכוון ללא קדקודים בודדים. הוכיחו ש- G הוא χ- מינימלי שבו $\chi(G) = 3$ אם ורק אם G הוא גרף מעגל פשוט מאורך אי-זוגי.

($\Rightarrow$) יהי G גרף מעגל פשוט C_n כאשר n אי-זוגי. אז G אינו דו-חלקי, וראינו בכיתה ש- $\chi(G) = 3$. אם e צלע כלשהי של G אז הגרף $G' = G\backslash\{e\}$ הוא גרף מסלול, ובפרט הוא עץ ולכן דו-חלקי. זאת אומרת ש- $\chi(G') = 2$.

($\Leftarrow$) יהי G גרף χ- מינימלי שבו $\chi(G) = 3$. זאת אומרת ש- G אינו דו-חלקי, ולכן יש ב- G מעגל פשוט C_n מאורך אי-זוגי n. נרצה להוכיח ש- $G = C_n$; אז נניח בשלילה ש- $G \neq C_n$. אין קדקודים בודדים ב- G, לכן חייב להיות שיש צלע e ב- G שאינה שייכת למעגל הפשוט C_n. אבל אז הגרף $G' = G\backslash\{e\}$ עדיין מכיל את המעגל הפשוט C_n, בסתירה להנחה ש- $\chi(G') < \chi(G) = 3$, כלומר ש- G' דו-חלקי.

שאלה 4:

סעיף א (10 נקודות):

הוכיחו כי גרף G=(V,E) הוא דו-חלקי אם ורק אם **בכל** תת-גרף H=(V',E') של G ישנה קבוצת קודקודים בלתי תלויה מגודל לפחות |V'|/2. (נזכור כי קבוצה $S \subseteq V'$ היא בלתי תלויה אם אין אף קשת בין זוג קודקודים ב-S).

(⇐) כיוון שG דו-חלקי, כל תת-גרף H=(V',E') שלו הוא דו-חלקי, נניח $V' = V_1 \uplus V_2$. אזי הגדול מבין הצדדים מהווה קבוצה בלתי תלויה.

(⇒) נניח כי בכל תת-גרף H=(V',E') של G ישנה קבוצת קודקודים בלתי תלויה מגודל לפחות |V'|/2, ממשפט שנלמד בכיתה, מספיק להראות שכל המעגלים של G הם מאורך זוגי. יהי C=(V',E') מעגל כלשהו ב-G, נניח בשלילה ש-C הוא מאורך 2k+1 לאיזה מספר טבעי k, אזי מההנחה יש בגרף המושרה על קודקודיו קבוצה בלתי תלויה מגודל לפחות k+1. אבל מעקרון שובך יונים, כל בחירה של k+1 איברים מתוך 2k+1 המסודרים במעגל יהיו שניים סמוכים, וזו סתירה. (כל זוג קודקודים סמוכים במעגל מהווה שובך - יש 2k+1 שובכים, וכל איבר מבין k+1 האיברים שנבחרים נכנס ל-2 השובכים המכילים אותו, לכן יש 2k+2 יונים).

<u>סעיף ב (15 נקודות)</u>:

יהי G=(V,E) גרף עם לפחות 3 קודקודים, c>1 מספר טבעי. נאמר של-G יש **צפיפות** c אם לכל תת-גרף שלו H=(V',E') מתקיים $\frac{|E'|}{|V'|} < c$. הוכיחו כי לגרף עם צפיפות c, קיימת צביעה חוקית של קודקודיו ב-2c צבעים.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הקודקודים. בסיס האינדוקציה עבור גרף עם 3 קודקודים נכון כי c>1 וניתן לצבוע אפילו ב-3 צבעים.

נניח כי הטענה נכונה לגרף עם צפיפות c ו n-1 קודקודים, ונוכיח לגרף G=(V,E) עם צפיפות c ו n קודקודים: לפי משפט הדרגות והגדרת צפיפות נקבל כי $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E| < 2c|V|$, בפרט קיים קודקוד $x \in V$ עם deg(x) < 2c. נוציא את x וכל הקשתות החלות בו מהגרף. נשים לב שגם לכל תת-גרף של G, בפרט ל G\{x}, יש צפיפות c. מהנחת האינדוקציה ניתן לצבוע את G\{x} ב-2c צבעים, וכיוון של-x יש לכל היותר 2c-1 שכנים, ניתן לצבוע גם את x בצבע שלא שויך לאף שכן שלו.

<u>שאלה 5</u>:

בחנות מכשירי חשמל מוכרים טלוויזיות המיוצרות על ידי שני מפעלים שונים, מפעל A ומפעל B. נניח כי לכל טלוויזיה, באופן בלתי תלוי יש סיכוי של 0.1 להיות מקולקלת אם נוצרה במפעל A וסיכוי 0.2 להיות מקולקלת אם נוצרה במפעל B.

<u>סעיף א (10 נקודות)</u>:

נניח כי קנינו טלוויזיה מהחנות מבלי לדעת היכן נוצרה, יש סיכוי שווה לכל אחד משני המפעלים. בבית ראינו שהיא מקולקלת, מה הסיכוי שהטלוויזיה נוצרה במפעל B?

נסמן בA,B בהתאמה את המאורעות שהטלוויזיה יוצרה במפעל A,B, וב-D את המאורע שהטלוויזיה מקולקלת.

נחשב קודם $Pr(D) = Pr(D|A)Pr(A) + Pr(D|B)Pr(B) = 0.5(0.1 + 0.2) = 0.15$, וכעת

$$Pr(B|D) = \frac{Pr(D|B)Pr(B)}{Pr(D)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.15} = \frac{2}{3}$$

<u>סעיף ב (15 נקודות)</u>:

אם קנינו שתי טלוויזיות בחנות, המוכר הבטיח שהן מאותו המפעל, אך הוא לא יודע איזה (שוב, יש סיכוי שווה לכל מפעל). בבית ראינו שהטלוויזיה הראשונה מקולקלת, מה הסיכוי שגם השנייה מקולקלת?

נסמן ב-E את המאורע שהטלוויזיה השנייה מקולקלת. נחשב מראש את ההסתברות ששתיהן מקולקלות:

$$Pr(E \cap D) = Pr(E \cap D|A)Pr(A) + Pr(E \cap D|B)Pr(B) = 0.5(0.01 + 0.04) = 0.025$$

$$Pr(E|D) = \frac{Pr(E \cap D)}{Pr(D)} = \frac{0.025}{0.15} = \frac{1}{6}$$

<u>סעיף ג (5 נקודות)</u>:

תיקון טלוויזיה של מפעל A עולה 50 שקלים, ותיקון טלוויזיה של מפעל B עולה 200 שקלים. המוכר רוצה לתקן משלוח של 40 טלוויזיות חדשות ממפעל A ו-30 טלוויזיות חדשות ממפעל B, מהי תוחלת עלות התיקון? (אם הטלוויזיה תקינה, עלות התיקון היא 0).

לכל טלוויזיה i נגדיר משתנה מקרי f_i שערכו 0 אם היא תקינה ועלות התיקון אם היא מקולקלת, ונסמן $f = \sum_{i=1}^{70} f_i$.

$$\mathrm{E}[f] = \sum_{i=1}^{70} E[f_i] = \sum_{i=1}^{40} 50 \cdot Pr(f_i = 50) + \sum_{i=41}^{70} 200 \cdot Pr(f_i = 200) = 1400$$

בהצלחה!