אוניברסיטת בן-גוריון
המחלקה למדעי המחשב

מועד א' במבנים בדידים וקומבינטוריקה 202-1-1061	פרופ' מתיא כ"ץ, ד"ר עופר נימן, ד"ר סטוארט סמית
03.07.13 09:00	טל באומל, יונתן גולדפלד, ארנולד פילצר, עמית צור, יעל שטיין
חומר עזר	**אסור**
משך הבחינה	שלוש שעות

הנחיות חשובות:

- המבחן כולל 5 שאלות, **עליכם לענות על 4 שאלות בלבד** מתוך ה – 5. משקלה של כל שאלה הוא 25 נקודות.יש לנמק את תשובותיכם.
- אלא אם נאמר מפורשות אחרת, כל הגרפים הם פשוטים ולא-מכוונים.
- מותר לצטט משפט שנלמד בכיתה ללא הוכחה, אלא אם נתבקשתם להוכיחו.
- **במידה ואינכם יודעים את התשובה לסעיף כלשהו, רשמו "לא יודעים" (במקום תשובה) ותזכו ב-20% מניקוד הסעיף. לא ניתן לכתוב לא יודע על חלק מסעיף.**
- רצוי לפתור את המבחן תחילה במחברת הטיוטה. לאחר מכן להעתיק את התשובות למקום המיועד לכך בטופס התשובות. **בדיקת המבחן לא תתחשב במחברת הטיוטה.**

בהצלחה !

שאלה	1א	1ב	2א	2ב	2ג	3א	3ב	3ג	4א	4ב	5א	5ב	5ג
ציון													

שאלה 1:

סעיף א (12 נקודות):

הוכח את הלמה הבאה:
תהי $d_1, d_2, \dots, d_n$ סדרה של n מספרים שלמים, אזי
יש עץ מתויג עם n קודקודים שזוהי סדרת הדרגות שלו אם ורק אם $d_1, \dots, d_n \geq 1$ וגם $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

פתרון:

הוכח בכיתה.

<u>סעיף ב (13 נקודות):</u>

יהי $G=(V,E)$ גרף עם n קדקודים שאין בו קדקודים מבודדים ואין לו תת-גרף מושרה עם בדיוק שתי צלעות (כלומר אין $S\subseteq V$ כך שמספר הצלעות בתת-גרף המושרה ע"י S הוא 2).
הוכח: G הוא הגרף השלם על n קדקודים, כלומר $G=K_n$. (רמז: אינדוקציה על n .)

<u>הוכחה:</u>

באינדוקציה על n.

אם $n=2$, אז כיוון שאין בגרף קדקודים מבודדים, הגרף הינו בהכרח K_2.

נניח עתה שמספר הקדקודים ב- G הוא $n > 2$, ויהי v קדקוד כלשהו ב-G .

נתבונן בגרף $G' = G\backslash\{v\}$.

טענה 1: אין ב- G' קדקודים מבודדים.

הוכחה: אם יש ב- G' קדקוד מבודד u, אזי ב- G , u בהכרח מחובר ל- v.

אם הדרגה של v גדולה מ- 1, אזי יהי w קדקוד נוסף המחובר ל-v . הגרף המושרה ע"י $\{u,v,w\}$ מכיל בדיוק שתי צלעות בסתירה לנתון.

אם הדרגה של v היא 1, אזי יהי x , $x\neq u,v$, קדקוד כלשהו ב- G ויהי y קדקוד המחובר ל- x (בהכרח קיים כזה והוא שונה מ- u או v). הגרף המושרה ע"י $\{u,v,x,y\}$ מכיל בדיוק שתי צלעות, שוב בסתירה לנתון.

טענה 2: אין ב- G' תת גרף מושרה עם בדיוק שתי צלעות.

הוכחה: תת גרף כזה הוא גם תת גרף מושרה ב- G.

לפי הנחת האינדוקציה $G' = K_{n-1}$.

עתה כיוון ש- v אינו מבודד הוא מחובר אל לפחות קדקוד אחד u ב- G'. אם v לא מחובר אל כל קדקודי G', אז יהי w קדקוד ש- v לא מחובר אליו. כיוון שיש צלע בין u ל- w, הגרף המושרה ע"י $\{u,v,w\}$ מכיל בדיוק שתי צלעות בסתירה לנתון.

מסקנה: $G=K_n$.

מס' נבחן:____________

שאלה 2:

סעיף א (5 נקודות):

נכון או לא נכון: קיים גרף עם בדיוק שני רכיבי קשירות, כך שבכל אחד מהם יש בדיוק קדקוד אחד שדרגתו אי-זוגית.

נכון **לא נכון** (הקף את התשובה הנכונה)

סעיף ב (10 נקודות):

יהי G גרף 4-רגולרי מישורי וקשיר עם 16 קדקודים.
אם כל אחת מפאותיו של G היא משולש או מרובע,
כמה פאות משולשות יש ב- G וכמה פאות מרובעות יש ב- G ?

פתרון:

G 4-רגולרי, לכן $\sum_{v\in V} d(v) = 4\cdot|V| = 64 = 2\cdot|E|$, כלומר $|E| = 32$. מכך שהגרף מישורי וקשיר ניתן להשתמש בנוסחת אוילר, ולקבל:
$|V| - |E| + |F| = 16 - 32 + |F| = 2$, כלומר $|F| = 18$. נסמן ב - F_3, F_4 את קבוצות הפאות המרובעות, משולשות בהתאמה. אז $|F_3| + |F_4| = |F| = 18$. נסכם את הצלעות שחלות בכל פאה ונקבל $\sum_{f\in F} t(f) = 3\cdot|F_3| + 4\cdot|F_4| = 2|E| = 64$, שכן כל $f \in F_3$ תורמת 3 צלעות לסכום וכל $f \in F_4$ תורמת 4 צלעות, וכל צלע חלה בשתי פאות (באופן כללי ייתכן שבאותה פאה פעמיים, כאן זה אינו המצב), ולכן נסכמת פעמיים. קיבלנו 2 משוואות עם שני נעלמים, נפתור: $3\cdot|F_3| + 4\cdot|F_4| = 3(|F_3| + |F_4|) + |F_4| = 3\cdot 18 + |F_4| = 64$, כלומר $|F_4| = 10$ ולכן $|F_3| = 8$.
<u>הערה</u>: גם צלעות שחלות באותה פאה פעמיים (כאן כאמור אין כאלה), נספרות פעמיים בסכימה.

סעיף ג (10 נקודות):

יהי G גרף עם n קדקודים כך ש $n \geq \binom{7}{3}$ ואין ב- G קבוצה בלתי תלויה בגודל 4. (תזכורת: קבוצה S של קדקודים היא בלתי תלויה, אם אין ב- G צלע המחברת בין זוג קדקודים מ- S.)
הוכח ש- G אינו 4-צביע.

פתרון:

פתרון אחד: ממשפט ארדש-סקרש $R(5,4) \leq \binom{5+4-2}{5-1} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} \leq n$, לכן בכל צביעה של צלעות K_n בכחול ואדום יש תת גרף K_5 מושרה הצבוע בכחול או תת גרף מושרה K_4 הצבוע אדום. נצבע את K_n כבתרגול: כל צלעות G בכחול וכל צלעות $\bar{G}$ באדום. אם מתקבל בצביעה K_4 אדום, אז $\bar{G}$ מכיל K_4 כתת גרף מושרה, ולכן יש תת קבוצה ב"ת בגודל 4 ב $G -$ וסתירה לנתון. לכן יש K_5 הצבוע בכחול, כלומר G מכיל K_5 כתת גרף מושרה ולכן אינו 4-צביע.

פתרון שני: נניח בשלילה ש - G 4-צביע. מעקרון שובך היונים המוכלל יש תת קבוצה של קדקודים בגודל $\left\lceil \frac{\binom{7}{3}}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{35}{4} \right\rceil = 9$ הצבועים באותו צבע בצביעה חוקית. תת קבוצה כזו בהכרח ב"ת ומכילה קבוצה ב"ת בגודל 4, וקיבלנו סתירה לנתון.

שאלה 3:

סעיף א (6 נקודות):

יהי n מספר שלם חיובי ותהי $A = \{0, 1, 2\}$.
יהי $\Omega = \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$ מרחב הסתברות עם התפלגות אחידה, ויהי f המשתנה המקרי שמתאים לכל סדרה $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \Omega$ את הסכום: $f(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \sum_{i=1}^{n} i a_i$.
חשב את התוחלת $E[f]$.

פתרון:

נגדיר n משתני עזר $f_1, \dots, f_n$: $f_{i(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)} = a_i$.

אזי, $f = \sum_{i=1}^{n} i \cdot f_i$ ו- $E(f) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot E(f_i)$.

נחשב את $E(f_i)$:

$$E(f_i) = \sum_{j=0}^{2} j \cdot Pr(f_i = j) = \tfrac{1}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 2 = 1$$

ולכן,

$$\mathrm{E}(f) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot E(f_i) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>סעיף ב (9 נקודות):</u>

בתא מספר I יש 2 כדורים שחורים ו- 3 כדורים אדומים. בתא מספר II יש כדור שחור אחד וכדור אדום אחד. בוחרים באקראי באחד משני התאים ושולפים מתוכו כדור באופן אקראי. נסמן ב- B את המאורע "הכדור שנבחר הוא שחור" וב- A_I את המאורע "נבחר תא מספר I". חשב את $\Pr(A_I|B)$.

<u>פתרון:</u>

$$\Pr(A_I|B)=\frac{\Pr(A_I\cap B)}{\Pr(B)}=\frac{\Pr(A_I)\Pr(B|A_I)}{\Pr(B)}=\frac{\Pr(A_I)\Pr(B|A_I)}{\Pr(B\cap A_I)+\Pr(B\cap A_{II})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{20}}$$

$$=\frac{4}{9}$$

<u>סעיף ג (10 נקודות):</u>

צובעים את צלעות הגרף השלם על 5 קדקודים K_5 בשני צבעים, כחול ואדום, כדלהלן: לכל צלע e בגרף, מטילים מטבע הוגן וצובעים את e בכחול אם ורק אם יצא "עץ". חשב את המספר הצפוי של משולשים כחולים בגרף הצבוע (כלומר, את תוחלת מספר המשולשים הכחולים במרחב ההסתברות המתאים).

<u>פתרון:</u>

ב- K_5 יש $\binom{5}{3}=10$ משולשים. עבור צביעה w של צלעות K_5 , יהי $f(w)$ מספר המשולשים הכחולים ב- w.

עלינו לחשב את $E(f)$. נגדיר עשרה משתני עזר:

$$f_i(w)=\begin{matrix}1, & the\ i'th\ triangle\ is\ blue\ in\ w\\ 0, & otherwise\end{matrix}$$

אזי $f=\sum_{i=1}^{10}f_i$ ו- $E(f)=\sum_{i=1}^{10}E(f_i)$,

נחשב את $E(f_i)$:

$$E(f_i)=\Pr(f_i=1)=\frac{2^7}{2^{10}}=\frac{1}{8}$$

ולכן, $E(f)=\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

מס' נבחן:____________

<u>שאלה 4</u>:

<u>סעיף א (15 נקודות)</u>:

נסמן ב – $\#_x(w)$ את מספר המופעים של האות x במילה w. מצאו נוסחת נסיגה (בודדת), יחד עם תנאיי התחלה, עבור מספר המילים w באורך n מעל הא"ב $\{a,b,c\}$, כך שבכל רישא p של w מתקיים $|\#_b(p) - \#_c(p)| \le 1$.

<u>פתרון:</u>

קודם כל נגדיר מילה תקינה: היא מילה w מאורך n מעל הא"ב $\{a,b,c\}$ כך שבכל רישא p של w מתקיים ש- $|\#_b(p) - \#_c(p)| \le 1$.

לכל מספר טבעי n נגדיר:

a_n = מספר המילים התקינות w מאורך n.

b_n = מספר המילים התקינות w מאורך n שבהן $\#_b(w) - \#_c(w) = 1$.

c_n = מספר המילים התקינות w מאורך n שבהן $\#_c(w) - \#_b(w) = 1$.

d_n = מספר המילים התקינות w מאורך n שבהן $\#_b(w) = \#_c(w)$.

אנחנו מחפשים נוסחת נסיגה עבור הסדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. נשים לב לעובדה שכל רישא (כולל הרישא הריק מאורך 0) של מילה תקינה היא מילה תקינה. בפרט, נתונה מילה תקינה w מאורך $n \ge 1$, נסמן ב- w' את הרישא של w מאורך $n-1$.

קודם כל נבנה מערכת נוסחאות נסיגה שמתקיימות לכל $n \ge 1$:

(1) $d_n = b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}$. (אם w מסתיימת ב- a יש d_{n-1} אפשרויות עבור w', אם w מסתיימת ב- b יש c_{n-1} אפשרויות עבור w', ואם w מסתיימת ב- c יש b_{n-1} אפשרויות עבור w'.)

(2) $b_n = b_{n-1} + d_{n-1}$. (אם w מסתיימת ב- a יש b_{n-1} אפשרויות עבור w', ואם w מסתיימת ב- b יש d_{n-1} אפשרויות עבור w'. לא יתכן ש w מסתיימת ב- c.)

(3) $c_n = c_{n-1} + d_{n-1}$. (אם w מסתיימת ב- a יש c_{n-1} אפשרויות עבור w', ואם w מסתיימת ב- c יש d_{n-1} אפשרויות עבור w'. לא יתכן ש w מסתיימת ב- b.)

ברור שלכל $n \ge 0$ מתקיים ש- $a_n = b_n + c_n + d_n$, ולכן מ- (1) נסיק ש-

(4) $d_n = a_{n-1}$ לכל $n \ge 1$.

בנוסף, ברור מהסימטריות בין b ל- c ש- $b_n = c_n$ לכל $n \ge 0$. לכן אפשר להחליף את המערכת (1), (2) ו- (3) במערכת עבור כל $n \ge 1$:

(5) $d_n = 2b_{n-1} + d_{n-1}$

(6) $b_n = b_{n-1} + d_{n-1}$

אפשר לרשום את (5) בצורה

(7) $2b_{n-1} = d_n - d_{n-1}$ לכל $n \geq 1$, כלומר

(8) $2b_n = d_{n+1} - d_n$ לכל $n \geq 0$.

נכפיל את משוואה (6) ב- 2 ונציב עבור $2b_n$ ו- $2b_{n-1}$ את הביטויים המתקבלים מ- (7) ו- (8). נקבל:

(9) $d_{n+1} - d_n = d_n - d_{n-1} + 2d_{n-1}$ לכל $n \geq 1$, כלומר

(10) $d_{n+1} = 2d_n + d_{n-1}$ לכל $n \geq 1$.

מ- (10) ו- (4) נובע ש-

(11) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ לכל $n \geq 2$.

זאת נוסחת הנסיגה המבוקשת. תנאי ההתחלה הם $a_0 = 1$ ו- $a_1 = 3$.

הערה: מספר סטודנטים הגיעו לנוסחה הנכונה בדרך לא נכונה. למשל:

(א) כמה סטודנטים הגדירו את d_n כמספר המילים התקינות המסתיימות ב- a, b_n כמספר המילים התקינות המסתיימות ב- b, ו- c_n כמספר המילים התקינות המסתיימות ב- c. הם הסיקו ש- (1), (2), ו- (3) מתקיימות; בפרט רשמו שאם מילה w מסתיימת ב- b אז הרישא w' אינה מסתיימת ב- b. אבל זה אינו נכון: למשל, המילה cbb תקינה.

(ב) עוד סטודנטים הגדירו את d_n כמספר המילים התקינות המתחילות ב- a, b_n כמספר המילים התקינות המתחילות ב- b, ו- c_n כמספר המילים התקינות המתחילות ב- c. הם הסיקו ש- (1), (2), ו- (3) מתקיימות; בפרט רשמו בצדק שאם מילה w מתחילה ב- b אז האות השניה אינה יכולה להיות b. אבל הסיפא שמתחילה באות השניה אינה בהכרח מילה תקינה. הפעם נקח כדוגמא את המילה bcc.

(ג) מספר סטודנטים לא הבדילו בין a_n ל- d_n. (כמו שראינו, שתי הסדרות מקיימות את אותה נוסחת הנסיגה.)

<u>סעיף ב (10 נקודות):</u>

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ נתונה על ידי נוסחת הנסיגה $a_n = 8a_{n-1} - 7a_{n-2}$ ותנאיי ההתחלה $a_0 = 3$ ו- $a_1 = 15$. מהו a_{50}?

<u>פתרון:</u>

ניצור משוואה ריבועית ונפתור אותה

$$\mathrm{x}^2 - 8\mathrm{x} + 7 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{x}_1 = 1 \ \mathrm{x}_2 = 7$$

לכן נוסחת הנסיגה היא מהצורה: $\mathrm{A_n} = \mathrm{A} * 1^{\mathrm{n}} + \mathrm{B} * 7^{\mathrm{n}}$

נציב את תנאיי ההתחלה

$$\begin{cases} 3 = \mathrm{A} * 1^0 + \mathrm{B} * 7^0 \\ 15 = \mathrm{A} * 1^1 + \mathrm{B} * 7^1 \end{cases}$$

ונקבל: $\mathrm{A} = 1 , \mathrm{B} = 2$. לכן:

$$\mathrm{A_n} = 1 * 1^{\mathrm{n}} + 2 * 7^{\mathrm{n}}$$

נציב $\mathrm{n} = 50$ ונקבל: $\mathrm{A}_{50} = 1 + 2 * 7^{50}$.

מס' נבחן:_____________

שאלה 5:

סעיף א (9 נקודות):

קוסם יוצר שיקוי סודי מ- 8 חומרים $m_1, m_2, \dots, m_8$. את החומרים עליו להוסיף אחד אחד תוך כדי בחישה, אך עליו להימנע מלהוסיף את m_3 מיד אחרי m_5 או m_8, וכמו כן עליו להימנע מלהוסיף את m_6 מיד אחרי m_4, כיוון שזה עלול לגרום לפיצוץ. בכמה דרכים יכול הקוסם להוסיף את החומרים ביצירת השיקוי?

פתרון:

נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה

$$A_1 = m_3 \to m_5 \; A_2 = m_3 \to m_8 \; A_3 = m_6 \to m_4$$

$$|S| = 8!$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 7!$$

$$|A_1 \cup A_2| = 0$$

$$|A_1 \cup A_3| = |A_2 \cup A_3| = 6!$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 0$$

לכן מספר הדרכים ליצור שיקוי הן

$$8! - 3 * 7! + 2 * 6!$$

<u>סעיף ב (8 נקודות)</u>:

מהו מספר המחלקים המשותפים של 3000 ושל 1800?

<u>פתרון:</u>

ראשית $3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$, $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

ולכן כל מחלק משותף שלהם הוא מהצורה $2^x 3^y 5^z$ כאשר $0 \le x \le 3 \,, 0 \le y \le 1 \,, 0 \le z \le 2$, לכן מס' המחלקים המשותפים הוא כמס' האפשרויות לבחור את x,y,z תחת התנאים הנ"ל. כלומר $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ אפשרויות.

<u>סעיף ג (8 נקודות)</u>:

כמה מספרים טבעיים יש בטווח $[40000 - 70000]$ שסכום ספרותיהם 12 וספרת האחדות שלהם היא 1?

<u>פתרון:</u>

נייצג את המס' הנ"ל כ $a_1a_2a_3a_4a_5$ כאשר הדרישה היא ש: $a_5 = 1$, $4 \le a_1 \le 6$ (עבור $a_1 = 7$ קיים מס' אחד כזה, והוא אינו עונה להגדרה), $0 \le a_i \le 9$ ו- $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 12$.

נסמן: $x_1 + 4 = a_1$, ונציב $a_5 = 1$ ונקבל:

$x_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 7$ עם הדרישה $0 \le x_1 \le 2$. (הדרישה שכל ספרה תהיה בין 0 ל-9 נעלמת, כי יש סכום של 7..)

מס' הפתרונות של זה היא מס' הפתרונות ללא התנאי פחות מס' הפתרונות בהם $x_1 > 2$. ולכן התוצאה היא:

$$\binom{10}{3} - \binom{7}{3}$$

(ניתן היה לפתור גם בעזרת פו"ר)