

מבנים בדידים וקומבינטוריקה תרגיל 3

1) כמה מספרים טבעיים בין 1 ל-500 אינם מתחלקים ב-7, אך מתחלקים ב-3 או ב-5?

2) תהי $M = \{1, 2, \dots, m\}$.

כמה אפשרויות יש לבנות 4 תתי קבוצות של M , שנסמן A, B, C, D (שימו לב כי הקבוצות מובחנות) כך שיתקיים:

$$A \cup B \cup C \cup D \subseteq M \text{ א.}$$

$$A \cup B \cup C \cup D = M \text{ ב.}$$

ג. כמו סעיף ב, וגם ארבע תתי הקבוצות זרות זו לזו

ד. כמו סעיף ג וגם $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset, D \neq \emptyset$

3) **תזכורת:** יחס $R \subseteq A \times B$ ייקרא יחס **מלא** אם: $\forall a \in A \exists b \in B: (a, b) \in R$.
תהי $[n]$ הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$. כמה יחסים מלאים יש על $[n]$?

4) בתור לרבנות עומדים n זוגות, מתוכם k רוצים להתגרש ו $(n - k)$ רוצים להתחתן. מהו מספר האפשרויות לסדרם בשני תורים (תור גברים ותור נשים), כך ששני בני זוג הרוצים להתגרש לא יעמדו זה לצד זה?

5) הערה: בשאלה זו אין צורך לפתור את הנוסחאות

א. הציגו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים להושיב מחדש n אנשים היושבים בשורה, כך שאף אדם לא יתרחק יותר מכיסא אחד ממקומו המקורי (כלומר, כל אדם יישאר במקומו או יזוז כיסא אחד ימינה או שמאלה).

ב. בקרקס משחק לוליון שקופץ על מערכת צירים חד-מימדית שמתחילה ב-0. הלוליון קופץ ימינה 3 או 4 יחידות וקופץ שמאלה יחידה אחת או שתיים. קפיצה שמאלה יכולה להתבצע רק אחרי קפיצה ימינה. מבצעים רישום של הנקודות שבהן נחת הלוליון. למשל, אם קפץ 4 ימינה, אחת שמאלה ואז שוב 4 ימינה, רושמים 7, 3, 4, 0. עבור $n \in \mathbb{N}$ נסמן ב- a_n את מספר הרישומים האפשריים עבורן הלוליון מסיים בנקודה n . מצאו נוסחת נסיגה עבור a_n עם תנאי התחלה מספיקים (אין צורך להגיע לביטוי סגור).

6) א. יהא $n \in \mathbb{N}$. חשבו את עוצמת הקבוצה:

$$\{f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, 2\} \mid \forall i \in \{1, \dots, n-1\}: f(i) + f(i+1) \neq 4\}$$

הערה: בסעיף זה יש לתת ביטוי סגור.

ב. נסמן ב- a_n את מספר הסדרות באורך n הבנויות מהתווים 0 ו-1 ולא מכילות את הרצף 001. מצאו נוסחת נסיגה עבור a_n .

7) נסחו נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה עבור מספר הסדרות באורך n הבנויות מהתווים 0 ו-1 המכילות לפחות זוג אחד של 0-ים סמוכים.