תרגיל בית 2 - פתרונות

1. א. שני המספרים צריכים להיות מאותה זוגיות. יש לנו שתי בחירות של שני מספרים מתוך 50 ללא חשיבות לסדר וללא חזרה. כלומר $\binom{50}{2}+\binom{50}{2}=2450$. בדרך אחרת: תחילה נבחר מספר מתוך 100 ואז בגלל הגבלת הזוגיות נבחר מספר מתוך 49. הסדר לא משנה אז נחלק ב 2: $\frac{100*49}{2}=2450$
ב. יש שתי סוגי בחירות: שלושה מספרים זוגיים או שני מספרים אי זוגיים ואחד זוגי לכן בסה"כ $\binom{50}{3}+\binom{50}{2}*\binom{50}{1}$ אפשרויות.

2. א. מספר תתי הקבוצות של D הצבועות בצבע זהה שווה למספר תתי הקבוצות של A + מספר תתי הקבוצות של B + מספר תתי הקבוצות של C ולכן בסה"כ:
$2^n+2^m+2^k-2$ (ספרנו את הקבוצה הריקה 3 פעמים ולכן נוריד אותה פעמיים)
ב. קבוצה תלת צבעית היא בעצם איחוד של תת קבוצה לא ריקה מ A תת קבוצה לא ריקה מ B ותת קבוצה לא ריקה מ C. סה"כ:
$(2^n-1)(2^m-1)(2^k-1)$
ג. קבוצות דו-צבעיות הן איחוד של 2 תתי קבוצות מA ו B, או B ו C או A וC. מספר האפשרויות לכך:
$(2^n-1)(2^m-1)+(2^n-1)(2^k-1)+(2^m-1)(2^k-1)$
מספר זה הוא אי זוגי תמיד כיוון שמספר תתי הקבוצות ללא הקבוצה הריקה הוא אי זוגי, מכפלה של אי זוגי זה אי זוגי וחיבור של 3 אי זוגיים הוא אי זוגי.

3. א. נוכיח את השוויון ע"י ספירת הסדרות באורך *n* מעל הא"ב {0,1,2}.
צד ימין: לכל מקום בסדרה יש 3 אפשרויות לכן סה"כ: 3^n
צד שמאל: אנו בוחרים תחילה את *i* המקומות בהם יהיו רק 0 או 1 וממילא בשאר המקומות נשים את 2. מספר האפשרויות לכך הוא $\binom{n}{i}$. לאחר מכן, בכל אחד מ *i* המקומות נבחר האם הספרה תהיה 0 או 1 ישנם *2* אפשרויות לכל אחד מ *i* המקומות לכן סה"כ 2^i .
i יכול להיות מספר בין 0 ל *n* לכן סה"כ: $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i$
ב. נוכיח את השוויון ע"י ספירת האפשרויות לסידור המספרים *{1,2,...n+1}* בשורה ללא המקרה בו הסדרה היא סדרת הזהות – *1,2,3...,n+1*
צד ימין: כל האפשרויות לסדר *n+1* איברים בשורה הוא *(n+1)!* מזה נחסיר את האפשרות בה זו סדרת הזהות – אפשרות אחת.
בצד שמאל – נמנה את כל הסידורים בהם האיבר ה *k+1* מהסוף הורס את הסדר (האיבר השמאלי ביותר שהורס את הסדר). כלומר עד האיבר ה *n+1-k-1* זוהי סדרת הזהות (כלומר מתחילה מהספרה 1 עד *n+1-k-1*). לאיבר במקום ה *k+1* מהסוף יש *k* אפשרויות (כל ה *k+1* הנותרים למעט האיבר שזהו מיקומו הסידורי) לאחר בחירה זו נמנה את כל האפשרויות לסדר את כל הנותרים בהמשך – *k!* ולכן סה"כ *k·k!*.
הפרמטר *k* יכול להיות כל מספר בין 1 ל *n* ולכן סה"כ נקבל $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$

4. א. זהו המקדם המולטינומי – מספר הדרכים לחלק את 52 האורחים ל3 קבוצות כך שבכל קבוצה מספר שונה של עצמים.$\binom{52}{13,22,17}=\frac{52!}{13!22!17!}$

ב. נפרק למקרים: ניקח K מפיות מסוג א ונבחר להן את המקומות: $\binom{52}{k}$, וממילא שאר המקומות יהיו עבור מפיות מסוג ב. K יכול להיות כל מספר בין 12 ל 30 (מכיוון שיש רק 40 מפיות מסוג ב חייב לפחות 12 מסוג א) לכן סה"כ: $\sum_{k=12}^{30}\binom{52}{k}$

5. א. זהו מקדם מולטינומי רגיל ולכן נקבל $\frac{9!}{5!3!} = \frac{9!}{1!5!3!0!} = \binom{9}{1,5,3,0}$

ב. כאן צריך להתיחס גם לקבועים שיחד עם המשתנים, מפיתוח מולטינום נקבל:

$$(2a-3b+c)^{10} = \sum_{n_1+n_2+n_3=10}\binom{10}{n_1,n_2,n_3}(2a)^{n_1}(-3b)^{n_2}c^{n_3}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=10}\binom{10}{n_1,n_2,n_3}2^{n_1}(-3)^{n_2}a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}$$

ולכן אצלנו בהצבת $n_1=5, n_2=4, n_3=1$ נקבל שהמקדם הוא:

$$\binom{10}{5,4,1}2^5(-3)^4 = 32\cdot 81\cdot\frac{10!}{5!4!}$$

ג. כדי לקבל y^{24} ישנן 2 אפשרויות:

אפשרות אחת היא לבחור פעמיים את y^9 ו 3 פעמים y^2. יתר הפעמים צריך לבחור את 1. לכן נקבל שזה יוצא $\frac{25!}{20!3!2!} = \binom{25}{20,3,2}$

אפשרות שנייה היא לבחור 12 פעמים את y^2 והשאר (13 פעמים) את 1 שזה יוצא $\binom{25}{13,12,0}$ לכן בסה"כ התשובה היא הסכום: $\binom{25}{20,3,2} + \binom{25}{13,12,0}$

ד. בדומה לסעיף הקודם, כאן צריך לבחור פעמיים את x^8 ופעם אחת את x^5 ולכן נקבל:

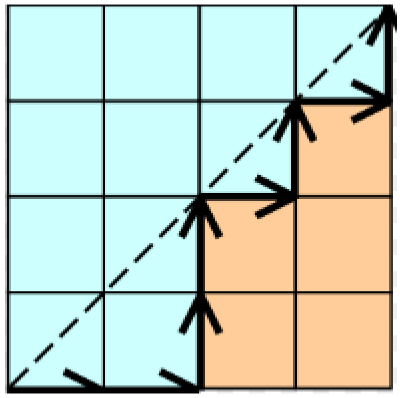
$$\binom{100}{97,1,2} = \frac{100!}{97!1!2!} = 50\cdot 98\cdot 99$$

6. התשובה היא שזהו מספר קטלן *Cn*.

נתבונן במספר הילוכי הסריג מ (0,0) ל (n,n) אשר אינם עולים על הישר y=x.

ניתן לראות כי ניתן לייצג את סדרת ההילוכים ע"י הסתכלות על סדרת הגבהים במסלול: המיקום ה i בסדרה ייצג את הגובה בנקודה ה-i לכל $1 \le i \le n$ - כלומר את ערך y הנמוך ביותר בנקודה בה x=i

למשל ההילוך:



ייוצג ע"י הסדרה: 0,0,2,3. לכל הילוך קיימת סדרה יחידה המקיימת $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$

ו $a_i < i$ לכל $1 \leq i \leq n$.

ולהיפך – כל סדרה העונה על תנאי השאלה מייצגת הילוך סריג חוקי. כלומר יש לנו התאמה חח"ע ועל בין סדרות העונות על תנאי השאלה לבין הילוכי סריג .

7. א. כיוון שבין סדרת הכניסות והיציאות של המכוניות והמשאיות אין כל תלות, הרי שבנפרד לכל אחת מהמנהרות יש Ck ו־ Cn רשימות שונות בהתאמה .הסיבה לכך היא שכניסה ויציאה ממנהרה שקולה להכנסה והוצאה ממחסנית או באופן שקול סדרת סוגריים מאוזנות. כל שילוב של שתי הרשימות זו בזו הוא חוקי ולכן יש לבחור את $2k$ הסימנים מתוך $2k+2n$ שילקחו מרשימת המכוניות והשאר יהיו מרשימת המשאיות. סה"כ הפתרון הוא: $\binom{2k+2n}{2k} \cdot C_k \cdot C_n$

ב. עתה המשאיות והמכוניות באותה מנהרה ולכן אפשר ראשית לסדר כניסה ויציאה של k+n כלי־רכב. לזה יש C_{n+k} אפשרויות. עתה יש לקבוע לכל כלי־רכב אם הוא מכונית (או משאית). זהות כלי הרכב תקבע בעת הכניסה של כלי־הרכב

לכן יש לבחור k מתוך k + n מכלי הרכב להיות מכוניות סה"כ הפתרון.:

$$\binom{k+n}{k} \cdot C_{n+k}$$