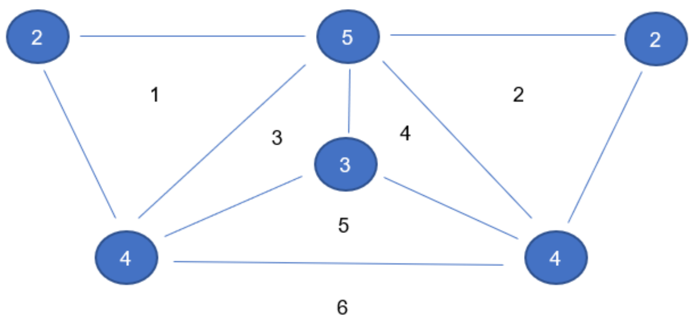
תרגיל בית 5 - פתרונות

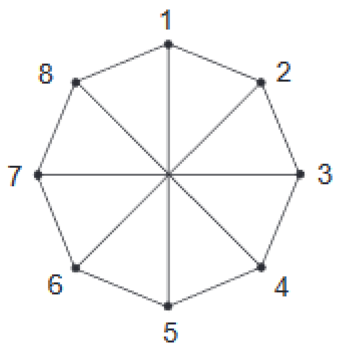
1. יהי G גרף, כך שדרגת הקודקודים ב-G הן 2,2,3,4,4,5 .
כמה קשתות יש בגרף G ? האם G יכול להיות מישורי ? אם כן, שרטטו דוגמא לגרף G.

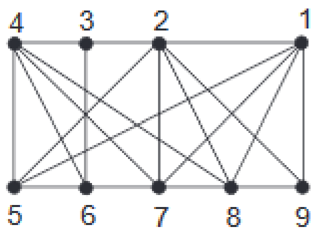
<u>פתרון :</u>

לגרף G יש 6 קודקודים , ולפי משפט הדרגות נקבל שמספר הקשתות שווה ל $10 = \frac{2+2+3+4+4+5}{2}$.
נוכל להראות שקיים גרף מישורי על ידי השרטוט:

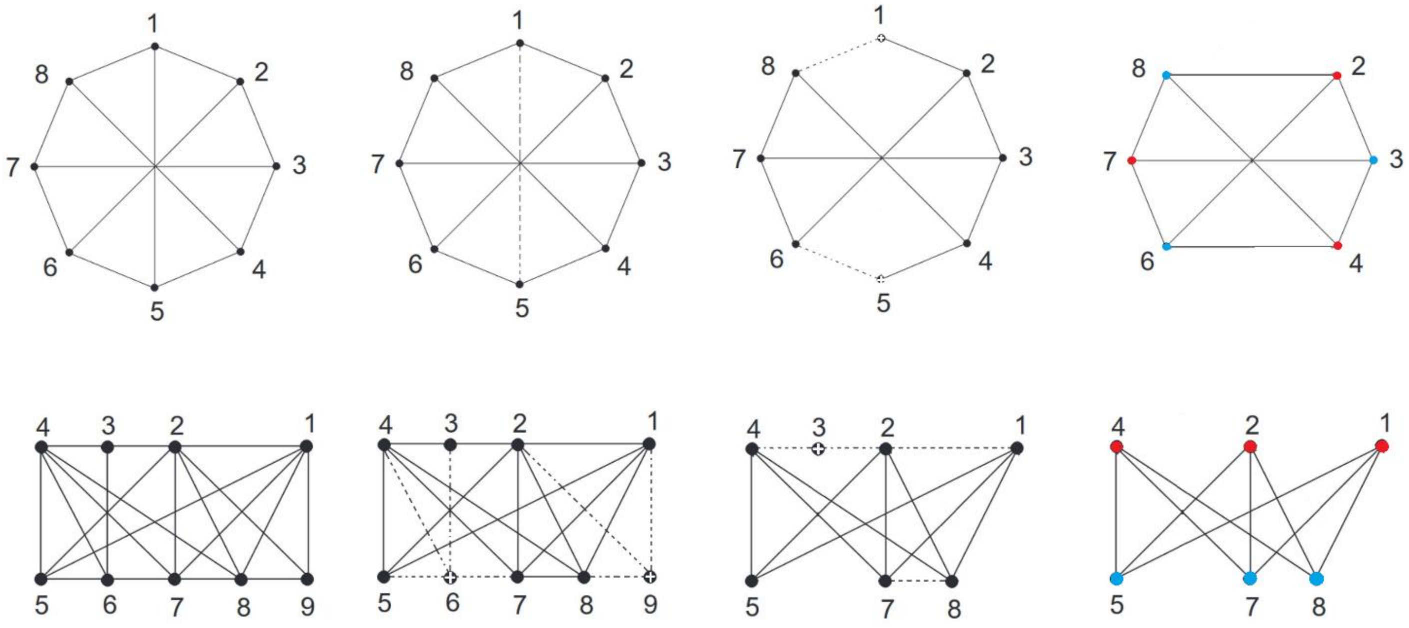


2. השתמשו במשפט ואגנר על מנת להראות שהגרפים הבאים אינם מישוריים:





<u>פתרון :</u>



3. יהיו $G = (V_G, E_G)$ ו-$H = (V_H, E_H)$ גרפים קשירים ופשוטים. נגדיר גרף חדש $S = (V_S, E_S)$ באמצעות המכפלה הקרטזית של G ו- H.

$$V_S = V_G \times V_H = \{(g,h) | g \in V_G, h \in V_H\}$$
$$E_S = \left\{\left\{\left(g_i, h_j\right), (g_k, h_s)\right\} \mid \{g_i, g_k\} \in E_G \text{ } or \left\{h_j, h_s\right\} \in E_H\right\}$$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הגרפים G ו - H מכילים מעגל המילטון, אזי הגרף S גם מכיל מעגל המילטון.

ב. אם הגרפים G ו - H מכילים מעגל אוילר, אזי הגרף S גם מכיל מעגל אוילר.

<u>פתרון :</u>

א. נתון כי הגרפים $G = (V_G, E_G)$ וגם $H = (V_H, E_H)$ מכילים מעגל המילטון, לכן קיימים המסלולים $(u_1, u_2, \dots, u_k, u_1) \in G$ וגם $(v_1, v_2, \dots, v_m, v_1) \in H$.

נבנה את המעגל ההמליטוני של הגרף S: נתחיל בקודקוד (u_1, v_1) ונתקדם אל $(u_2, v_1) \leftarrow \cdots \leftarrow (u_k, v_1)$. משם נמשיך ל-$(u_1, v_2) \leftarrow (u_2, v_2) \leftarrow \cdots \leftarrow (u_k, v_2)$. כך באופן דומה נמשיך מ-$(u_1, v_3)$ עד שנגיע ל-$(u_k, v_m) \leftarrow (u_1, v_1)$.

ב. נתון כי הגרפים $G = (V_G, E_G)$ וגם $H = (V_H, E_H)$ מכילים מעגלי אוילר, לכן לכל $u \in V_G, v \in V_H$ דרגות $\deg(u)$ ו-$\deg(v)$ זוגיות. לפי משפט קיום מעגל אוילר, מספיק להוכיח שדרגת כל קודקוד ב-S זוגית ו-S קשיר.

ראשית, נוכיח כי S גרף קשיר. נראה כי בין כל זוג קודקודים $(a,b), (c,d) \in V_S$ יש מסלול. היות ו-G גרף קשיר, קיים המסלול $(a, v_1, \dots, v_m, c)$ בין הקודקודים a ו-c . לכן נוכל ליצור את המסלול $\left((a,b), (v_1, b), \dots, (v_m, b), (c,b)\right)$ ב-S מקודקוד (a,b) לקודקוד (c,b). היות ו-H גם גרף קשיר, קיים גם מסלול בין קודקודים b ו-d. באותו אופן נוכל ליצור את המסלול ב-S מקודקוד (c,b) לקודקוד (c,d), ובכך הראנו מסלול בין כל שני קודקודים ב-S. לכן S גרף קשיר.

שנית, נוכיח שדרגת כל קודקוד $(a,b) \in V_S$ זוגית. נגדיר את קבוצות הקודקודים השכנים $A = \{u | \{u,a\} \in E_G\}$ ו-$B = \{v | \{v,a\} \in E_H\}$. נוכל לחלק את השכנים של (a,b) ל-3 סוגים:

a. כל קודקוד $(c,d) \in V_S$ כך שיש קשת רק בין c ל-a, כלומר קבוצת $A \times (V_H \backslash B)$.

b. כל קודקוד $(c,d) \in V_S$ כך שיש קשת רק בין d ל-b, כלומר קבוצת $(V_G \backslash A) \times B$.

c. כל קודקוד $(c,d) \in V_S$ כך שיש קשת גם בין d ל-b וגם בין c ל-a, כלומר קבוצת $A \times B$.

נשים לב שהקבוצות שהגדרנו זרות, וגודל כל קבוצה הינו זוגי בגלל הזוגיות של $|A|$ ו-$|B|$. סכום גדלי הקבוצות הוא זוגי ולכן דרגת כל קודקוד בגרף S זוגי.

4. במחלקה למדעי המחשב נערך ניסוי. במהלך הניסוי כל משתתף קיבל טופס ובו נדרש לענות על 8 שאלות מתוך 10 שאלות. התגלה שאף משתתף לא ענה על אותן 8 שאלות ולכל 8 מתוך 10 השאלות קיים משתתף שענה עליהן. הוכיחו שבניסוי זה, ניתן לסדר את המשתתפים במעגל כך שכל זוג משתתפים שכנים ענו יחדיו על כל 10 השאלות שבטופס.

<u>פתרון :</u>

על מנת לפתור את השאלה נגדיר גרף:
V – כל משתתף מיוצג על ידי קודקוד.
E – קיימת קשת בין כל שני קודקודים אם שני המשתתפים ענו על כל 10 השאלות.

נראה שהגרף מכיל מעגל המילטוני ומכאן נוכל לסדר את כל המשתתפים במעגל.
מספר הקודקודים בגרף הוא כמספר הדרכים לבחור 8 שאלות מתוך 10, כלומר קיימים $45 = \binom{10}{8}$ קודקודים. נחשב את מספר השכנים של קודקוד v, שכל אחד מהם מייצג משתתף שענה על 2 השאלות שלא ענה המשתתף v. כלומר כל שכן ענה על 6 שאלות נוספות מתוך 8 שאלות הנותרות ועל כן יש בסה"כ $28 = \binom{8}{6}$ שכנים. נשים לב כי סכום הדרגות של כל זוג קודקודים שאינם שכנים שווה ל56, ולכן גדול ממספר הקודקודים בגרף. לכן התנאי של משפט Ore מתקיים ומובטח שהגרף מכיל מעגל המילטון.

5. א. נתון גרף פשוט ומישורי $G = (V, E)$ כך שמתקיים $|E| \geq 3$. הוכיחו שאי שוויון הבא מתקיים:
$$\sum_{v \in V}(6 - \deg(v)) \geq 12$$
ב. נתון בנוסף: קיים קודקוד $w \in V$ שדרגתו היא 8, ולכל קודקוד $v \in V/\{w\}$ מתקיים $\deg(v) \geq 5$.
הוכיחו שבגרף זה יש לפחות 15 קודקודים.

<u>פתרון :</u>

א. לפי המסקנה מנוסחת אוילר, לכל גרף פשוט ומישורי המקיים $|V| \geq 3$, קיימת לכל היותר $3|V| - 6$ צלעות. ולכן ניתן לרשום :
$$|E| \leq 3|V| - 6$$
$$6|V| - 2|E| \geq 12$$
$$\sum_{v \in V} 6 - \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 12$$
$$\sum_{v \in V}(6 - \deg(v)) \geq 12$$

ב. מסעיף א קיבלנו שמתקיים $\sum_{v \in V(G)}(6 - \deg(v)) \geq 12$. נשים לב כי
$$\sum_{v \in V(G), v \neq w}(6 - \deg(v)) + (6 - \deg(w)) \geq 12$$
ולכן נקבל $\sum_{v \in V(G), v \neq w}(6 - \deg(v)) \geq 14$. נשים לב כי הערך של כל איבר מצד שמאל של האי שוויון, שווה ל 1 לכל היותר ולכן נזדקק לפחות ל- 14 קודקודים בשביל לקיים את התנאי [ללא ספירת הקודקוד w] – ולכן בסך הכול ישנם לפחות 15 קודקודים בגרף G.

6. עבור גרף פשוט וקשיר $G=(V,E)$ נגדיר $L(G)=(E,F)$ הגרף בו הקודקודים הן צלעות G, וגם $F=\{\{e,e'\}|e,e'\in E\ ,\ e\cap e'\neq\emptyset\ ,\ e\neq e'\}$, כלומר קיימת קשת בין 2 צלעות של E אם"ם יש להן קודקוד משותף. הוכיחו או הפריכו :

א) אם ב-G יש מעגל אוילר, אז ב- $L(G)$ יש מעגל המילטון.
ב) אם ב-G יש מעגל אוילר, אז ב- $L(G)$ יש מעגל אוילר.
ג) אם ב- $L(G)$ יש מעגל אוילר, אז ב-G יש מסלול אוילר.
ד) אם ב-G יש מעגל המילטוני, אז ב- $L(G)$ יש מעגל אוילר.

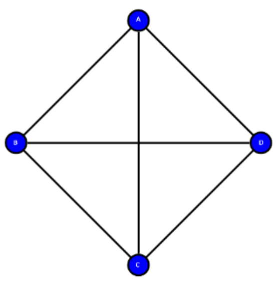
<u>פתרון :</u>

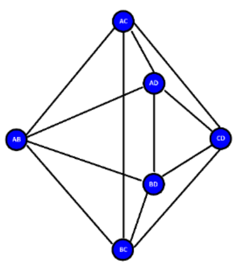
א. הוכחה .
יהי $(v_0,\dots,v_{m-1},v_m=v_0)$ מעגל אוילר ב-G , כאשר $|E|=m-1$.
לכל $0\le i\le m-1$ נגדיר את $e_i\in E$ להיות $e_i=\{v_i,v_{i+1}\}$ וגם את $e_m=\{v_0,v_1\}$. נראה כי המסלול על הצלעות $(e_0,e_2,\dots,e_m=e_0)$ הינו מעגל המילטוני ב- $L(G)$, כלומר עובר בכל קודקודי הגרף $L(G)$ שהינם הצלעות של G.

לפי אופן בניית המסלול ניתן להבחין כי בין כל שתי קשתות סמוכות e_i,e_{i+1} יש קודקוד משותף, כלומר מתקיים $v_{i+1}\in e_i\cap e_{i+1}$. לכן $\{e_i,e_{i+1}\}\in F$. במעגל אוילר $(v_0,\dots,v_{m-1},v_m=v_0)$ של G מופיעות כל הקשתות של E ולכן כל קודקודים של $L(G)$ מופיעים במעגל $(e_0,e_2,\dots,e_m=e_0)$.

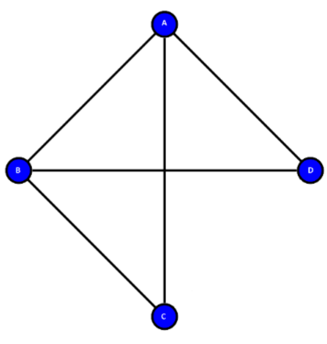
ב. הוכחה .
נתון שגרף G מכיל מעגל אוילר, מסעיף א נקבל כי הגרף $L(G)$ הינו קשיר. נסתכל על צומת v_e ב-$L(G)$ המייצג צלע $\{v_1,v_2\}$ ב-G. השכנים של צומת ב-$L(G)$ הם כל הצמתים המייצגים צלעות אשר חולקות צומת משותף עם e ב-G , כלומר כל הקודקודים המייצגים צלעות הכוללות את v_1 או v_2 ב-G . כיוון שדרגת שני צמתים אלו ב-G הינה זוגית (כי קיים ב-G מעגל אוילר), הרי שמספר הצלעות הנוגעות בכל אחד מהם מלבד e הוא אי זוגי. כלומר סך כל השכנים של v_e ב-$L(G)$ הוא חיבור של שני מספרים אי זוגיים, כלומר מספר זוגי. מכאן דרגת כל צומת ב-$L(G)$ היא זוגית, ולכן קיים בו מעגל אוילר.

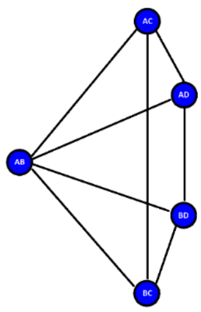
ג. הפרכה.
נתבונן בגרף המלא K_4, כל קודקוד בגרף זה הינו מדרגה 3. בעוד שהגרף של $L(K_4)$ כל קודקוד דרגתו הינה 4 ולכן יש בו מעגל אוילר.





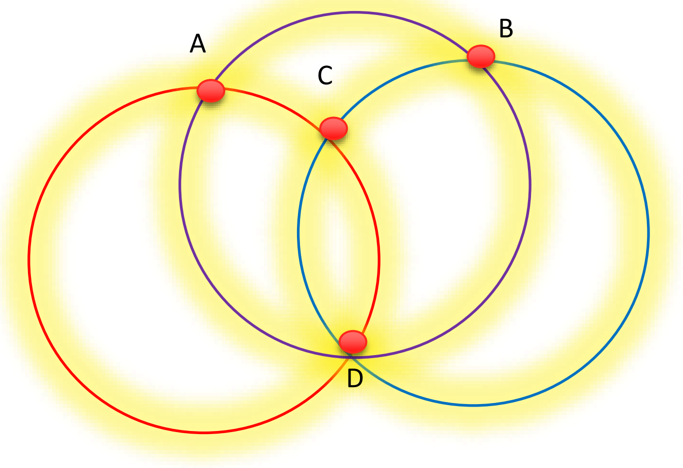
ד. הפרכה.
נתבונן ב-G, גרף המלא K_4 ללא הצלע CD. נקבל ש-$L(G)$ אינו מכיל מעגל אוילר כי כל קודקודיו (למעט אחד) הם בדרגה אי זוגית השווה ל3.





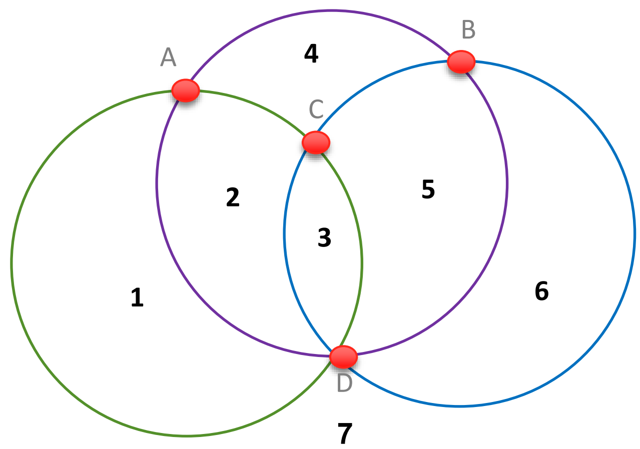
7. **<u>שאלת בונוס</u>**:

תהא C קבוצה של $n \geq 3$ מעגלים במישור, כאשר כל שניים מתוך המעגלים נפגשים בדיוק בשתי נקודות (אבל יתכן כי שלושה או יותר מעגלים שונים יעברו באותה נקודה). תהא X קבוצת כל נקודות החיתוך בין המעגלים של C . [רצ"ב דוגמא]



א. סטודנט רוצה לעבור על כל המעגלים עם מרקר מבלי להרים את המרקר מהדף. בנוסף הוא רוצה לעבור על כל נקודה במעגל בדיוק פעם אחת, למעט נקודות החיתוך שעליהן הוא מוכן לעבור יותר מפעם אחת. כמן כן, הסטודנט מעוניין לסיים באותה נקודה שממנה התחיל. הוכיחו כיצד ניתן לעבור על כל המעגלים כך שיתקיימו דרישות הסטודנט.

ב. לאחר שהסטודנט סיים לעבור עם המרקר, כעת הסטודנט מעוניין לספור את כל האזורים הפתוחים שמתקבלים מחלוקת המישור על ידי מעגלי C.
[לדוגמא: מסומנים 7 אזורים שנוצרים על ידי 3 מעגלים]



לכל נקודה $x \in X$ נסמן ב N_x את מספר המעגלים של C העוברים בה.
הוכיחו כי מספר האזורים הנ״ל שווה ל- $\sum_{x \in X} N_x + |X| - 2$.

<u>פתרון :</u>

א. נגדיר מולטי-גרף מישורי חדש $G=(V,E)$. קבוצת הקודקודים V שווה לקבוצה X.
לכל מעגל בקבוצת C, נגדיר קשת בין כל שני קודקודים שהם שכנים על המעגל. מהבנייה ייתכן שזוג קודקודים יהיו שכנים ביותר ממעגל אחד ולכן יוצרו צלעות מקבילות. נבחין כי G בא עם ציור מישורי שבו כל קשת שוכנת על המעגל שלה. מכל קודקוד $v\in V$ במעגל $c\in C$, תמיד יצאו שני קשתות מ-v במעגל [בשני כיוונים מנוגדים], ולכן דרגתו של כל קודקוד היא זוגית. נשתמש במשפט קיום של מעגל אוילר במולטי גרפים ונקבל כי נוכל לעבור במעגל על כל צלע פעם אחת, ובכך לעבור על כל המעגלים כך שיתקיימו כל שלושת התנאים.

[אופציה נוספת לפתרון: במולטי-גרף המתקבל, ניתן להמיר כל קשת מקבילה ב-2 קשתות חדשות ע"י פיצולה והוספת קודקוד דמה חדש לגרף, ובכך לקבל גרף מישורי פשוט]

ב. תהא F קבוצת הפאות בציור של הגרף G מסעיף א. נבחין כי קבוצה זו זהה לקבוצת האזורים המוגדרים ע"י C. נשתמש במולטי-גרף המישורי שהוגדר בסעיף א, ונקבל כי גרף זה יקיים $|F|=|E|+|V|-2$ (ניתן לשים לב כי כל צלע מקבילה במולטי-גרף קשיר מוסיפה פאה נוספת, לכן הנוסחה מתאזנת ותקפה גם על מולטי-גרף קשיר). גודל הקבוצה V שווה למספר הנקודות בקבוצה X. מספר הצלעות בכל מעגל שווה למספר הנקודות הנמצאות על המעגל (עבור מעגל שמונחת עליו $k\geq 2$ נקודות ייווצרו בדיוק k קטעים המחלקים את המעגל). לכל קודקוד ידוע מספר המעגלים שעליהם הוא מונח, ולכן נקבל כי סך כל הקשתות שווה לסך כל הקודקודים בכל מעגלים $\sum_{x\in X} N_x$. לכן נקבל כי מספר האזורים הוא $|F|=\sum_{x\in X} N_x+|X|-2$.