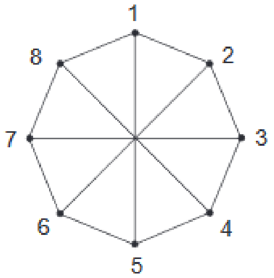
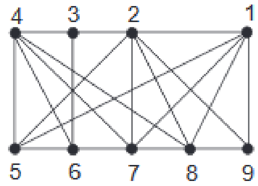
תרגיל בית 5

התרגיל להגשה עד ליום ראשון 07.06.2020 בשעה 12 בצהריים **במערכת ההגשות.** הגשה בקובץ PDF בלבד .

1. יהי G גרף, כך שדרגת הקודקודים ב-G הן 2,2,3,4,4,5 .
כמה קשתות יש בגרף G ? האם G יכול להיות מישורי ? אם כן, שרטטו דוגמא לגרף G.

2. השתמשו במשפט Wagner על מנת להראות שהגרפים הבאים אינם מישוריים:





3. יהיו $G=(V_G,E_G)$ ו-$H=(V_H,E_H)$ גרפים קשירים ופשוטים . נגדיר גרף חדש $S=(V_S,E_S)$ באמצעות המכפלה הקרטזית של G ו- H.

$$V_S = V_G \times V_H = \{(g,h) | g \in V_G, h \in V_H\}$$
$$E_S = \left\{\{(g_i,h_j),(g_k,h_s)\} \mid \{g_i,g_k\} \in E_G \ or\ \{h_j,h_s\} \in E_H\right\}$$

הוכיחו או הפריכו:
א. אם הגרפים G ו - H מכילים מעגל המילטון, אזי הגרף S גם מכיל מעגל המילטון.
ב. אם הגרפים G ו - H מכילים מעגל אוילר, אזי הגרף S גם מכיל מעגל אוילר.

4. במחלקה למדעי המחשב נערך ניסוי. במהלך הניסוי כל משתתף קיבל טופס ובו נדרש לענות על 8 שאלות מתוך 10 שאלות. התגלה שאף משתתף לא ענה על אותן 8 שאלות ולכל 8 מתוך 10 השאלות קיים משתתף שענה עליהן. הוכיחו שבניסוי זה, ניתן לסדר את המשתתפים במעגל כך שכל זוג משתתפים שכנים ענו יחדיו על כל 10 השאלות שבטופס.

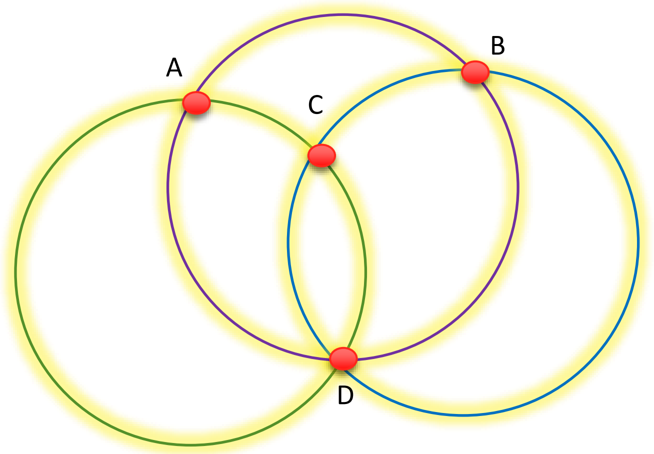
5. א. נתון גרף פשוט ומישורי $G=(V,E)$ כך שמתקיים $|E| \geq 3$. הוכיחו שאי שוויון הבא מתקיים:
$$\sum_{v \in V}(6-\deg(v)) \geq 12$$
ב. נתון בנוסף: קיים קודקוד $w \in V$ שדרגתו היא 8, ולכל קודקוד $v \in V/\{w\}$ מתקיים $\deg(v) \geq 5$.
הוכיחו שבגרף זה יש לפחות 15 קודקודים.

6. עבור גרף פשוט וקשיר $G=(V,E)$ נגדיר $L(G)=(E,F)$ הגרף בו הקודקודים הן צלעות G, וגם $F=\{\{e,e'\} | e,e' \in E\ ,\ e \cap e' \neq \emptyset\ ,\ e \neq e'\}$, כלומר קיימת קשת בין 2 צלעות של E אם"ם יש להן קודקוד משותף. הוכיחו או הפריכו :

א) אם ב-G יש מעגל אוילר, אז ב- $L(G)$ יש מעגל המילטון.
ב) אם ב-G יש מעגל אוילר, אז ב- $L(G)$ יש מעגל אוילר.
ג) אם ב- $L(G)$ יש מעגל אוילר, אז ב-G יש מסלול אוילר.
ד) אם ב-G יש מעגל המילטוני, אז ב- $L(G)$ יש מעגל אוילר.

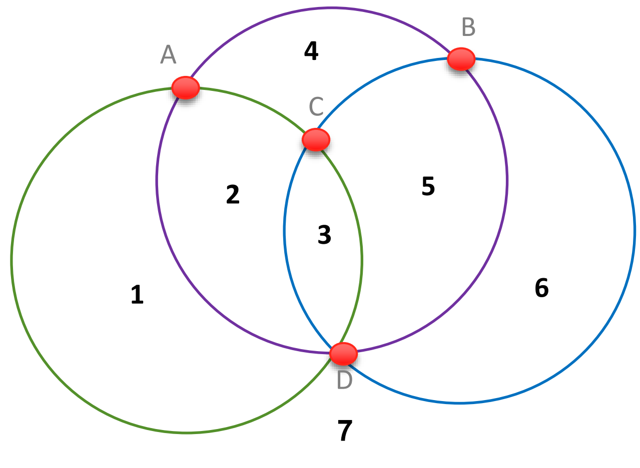
7. **<u>שאלת בונוס</u>:**

תהא C קבוצה של $n \geq 3$ מעגלים במישור, כאשר כל שניים מתוך המעגלים נפגשים בדיוק בשתי נקודות (אבל יתכן כי שלושה או יותר מעגלים שונים יעברו באותה נקודה). תהא X קבוצת כל נקודות החיתוך בין המעגלים של C . (על פי הגדרה מתקיים $2 \leq |X| \leq 2\binom{n}{2}$.) [רצ"ב דוגמא]



א. סטודנט רוצה לעבור על כל המעגלים עם מרקר מבלי להרים את המרקר מהדף. בנוסף הוא רוצה לעבור על כל נקודה במעגל בדיוק פעם אחת, למעט נקודות החיתוך שעליהן הוא מוכן לעבור יותר מפעם אחת. כמן כן, הסטודנט מעוניין לסיים באותה נקודה שממנה התחיל. הוכיחו כיצד ניתן לעבור על כל המעגלים כך שיתקיימו דרישות הסטודנט.

ב. לאחר שהסטודנט סיים לעבור עם המרקר, כעת הסטודנט מעוניין לספור את כל האזורים הפתוחים שמתקבלים מחלוקת המישור על ידי מעגלי C.
[לדוגמא: מסומנים 7 אזורים שנוצרים על ידי 3 מעגלים]



לכל נקודה $x \in X$ נסמן ב N_x את מספר המעגלים של C העוברים בה.
הוכיחו כי מספר האזורים הנ"ל שווה ל- $\sum_{x \in X} N_x + |X| - 2$.