תרגיל 0 – תרגיל חזרה

שימו לב התרגיל הר"מ אינו להגשה.

1. מצאו דוגמאות לקבוצות A, B, C המקיימות:

א. $A \notin C$ וגם $B \in C$ וגם $A \in B$.
ב. $A \in C$ וגם $B \in C$ וגם $A \in B$.
ג. $A \subseteq B$ וגם $A \in B$.

2. הוכח או הפרך כי לכל שתי קבוצות A, B מתקיים:

*תזכורת P היא קבוצת החזקה (קבוצת כל תתי הקבוצות)

א. $A \subseteq B \Leftarrow P(A) \subseteq P(B)$
ב. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$
ג. $A \in B \Leftarrow P(A) \in P(B)$
ד. $A \in B \Rightarrow P(A) \in P(B)$
ה. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
ו. $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

3. א. תארו את כל יחסי השקילות בקבוצה בת 3 איברים $\{a, b, c\}$.
ב. כמה יחסי שקילות יש בקבוצה בת 4 איברים?

4. נרצה להגדיר יחס שקילות R ב - $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, כלומר $R \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. היחס מוגדר באופן הבא: $R\{((m,n),(p,q)) | m,n,p,q \in \mathbb{N}, m+q = n+p\}$.

א. הוכיחו ש – R הוא יחס שקילות.
ב. תארו אילו איברים נמצאים במחלקת השקילות של איבר כלשהו $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, וציינו לאילו מחלקות שקילות שונות מחלק R את $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

5. יהי $L = (A, <)$ סדר קווי. הסדר $<$ הוא אי-רפלקסיבי, אנטי-סמטרי וטרנזיטיבי.
נאמר כי קבוצה $X \subseteq A$ היא קבוצה קמורה אם: לכל $a, b \in X$ אם $a < b$ אזי לכל $c \in A$, אם $a < c < b$ אזי $c \in X$.
נגדיר $I(L)$ את אוסף כל הקבוצות הקמורות הלא ריקות. נגדיר יחס על קבוצות ב - $I(L)$ באופן הבא:
נגדיר כי שתי קבוצות $X, Y \in I(L)$ מקיימות $X \prec Y$ אם $\forall x \in X \, \forall y \in Y (x < y)$.

א. הראו כי היחס $\prec$ הוא אי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי.
ב. הראו כי לכל $W, X, Y, Z \in I(L)$, אם $W \prec X$, $Y \prec Z$ וגם $X \nprec Y$ אזי $W \prec Z$.

6. הוכיחו כי $\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2$.

7. נגדיר $a_1 = 2$ ו- $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$. מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n והוכיחו אותה.

8. **מגדלי האנוי**: בהאנוי יש מקדש ובו שלושה עמודים גבוהים. על העמוד הימני מונחות n דסקיות בגדלים שונים, כאשר הדסקית התחתונה הינה הדסקית הגדולה ביותר והדסקית העליונה היא הדסקית הקטנה ביותר. נזירים במקדש זה עסוקים בהעברה הדסקיות מהעמוד הימני אל השמאלי ביותר תחת שתי ההגבלות הבאות:
- בכל שלב אפשר להעביר רק דסקית אחת.
- לעולם אסור להניח דסקית גדולה על דסקית קטנה.
עפ"י האגדה, כאשר יסיימו הנזירים לעביר את הדסקיות יגיע קץ העולם.
הוכיחו כי המספר המינימלי של צעדים שדרוש ע"מ להעביר n דיסקיות הוא $2^n - 1$.

9. שלושה סטודנטים ערכו משאל במטרה לבחור את המגדל האהוב עליהם מבין שלושת מגדלי האנוי. כל סטודנט דרג את שלושת המגדלים מהאהוב פחות עד האהוב ביותר ולאחר מכן ריכזו את התוצאות ובחרו את המגדל הפופולארי ביותר. תארו דירוג שהסטודנטים בחרו שלא יאפשר הכרעה כך שלא משנה איזה מגדל נבחר, קיים מגדל אחר אותו רוב הסטודנטים מעדיפים