

תרגיל בית 1

התרגיל להגשה ביום שלישי, 7.4.2020 בשעה 12 בצהריים במערכת ההגשות. יש להגיש קובץ PDF בלבד. שימו לב כי העבודה הינה בזוגות.

1. במסעדת "הכל טעים פה" מציעים שלושה סוגים של פיצה, חמישה סוגים של סלט ושמונה סוגי שתיה קלה. בכמה דרכים ניתן להזמין ארוחת פיצה סלט ושתייה?
 - א. כמה מספרים זוגיים מחלקים את המספר 237600?
 - ב. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 60$ כאשר ידוע שעבור כל משתנה x_i מתקיים $x_i \geq 1$?
3. א. כמה מילים (לא ריקות) שונות ניתן להרכיב מאותיות המילה COMPUTER? (כל רצף תווים נחשב מילה).
ב. כמה מילים שונות בנות 4 תווים ניתן להרכיב מאותיות המילה BALL?
4. א. יהי n מספר שלם חיובי ונניח ש- n גברים ו- $n + 1$ נשים יושבים ב- $2n + 1$ כסאות שמסודרים סביב שולחן עגול. הוכיחו שיש שתי נשים שיושבות זו ליד זו.
ב. הוכיחו שאם 31 גברים ו- 31 נשים יושבים בכסאות שמסודרים סביב שולחן עגול, אז יש מישהו (גבר או אישה) שיושב/ת בין שתי נשים. (רמז: הניחו שהכסאות צבועים בכחול ואדום לסירוגין).
5. באחווה הטבעת חברים ארבעה הוביטים, שני בני אדם, אלף אחד, גמד אחד וקוסם אחד. ידוע כי כל החברים באחווה נבדלים זה מזה.
 - א. בכמה דרכים ניתן להושיב את כל חברי האחווה במעגל, אם כל ההוביטים מוכרחים לשבת זה לצד זה (כרביעייה)?
 - ב. בכמה דרכים אפשר להושיב את כל חברי האחווה במעגל, אם הגמד והאלף לא מוכנים לשבת זה לצד זה?
 - ג. חברי האחווה שומעים רעש מפחיד, ומחליטים ללכת לבחון את מקור הרעש זה אחר זה. בכמה דרכים ניתן לסדר את חברי האחווה?
 - ד. לאחר דיון, חברי האחווה החליטו שמוטב שרק שלושה מהם ילכו זה אחר זה, והשאר יסתתרו. בכמה דרכים ניתן לבחור ולשלוח שלושה חברים מהאחווה?
 - ה. האלף מבחין כי הרעש כנראה מגיע מטרול גדול. לכן, הם החליטו שמוטב ששלושה חברי אחווה ילכו יחד, והשאר יסתתרו. בכמה דרכים אפשר לשלוח שלושה חברי אחווה יחדיו למשימה?
 - ו. חברי האחווה רוצים לאסוף קרשים למדורה ולבשל ארוחת ערב. לשם כך, הם מעוניינים להתחלק לשתי קבוצות שיבצעו את המטלות הללו (כלומר קבוצה אחת שתאסוף קרשים וקבוצה שנייה שתבשל). ידוע שבין הגמד לאלף ישנה יריבות עזה, וכי הם מצליחים להסתדר יחדיו רק אם גם הקוסם מתלווה אליהם. בכמה דרכים ניתן לחלק את חברי האחווה לשתי קבוצות זרות ולא ריקות, כך שאם הגמד והאלף נמצאים יחדיו באותה הקבוצה, גם הקוסם נמצא איתם?
 - ז. חברי האחווה מתקשים לנהל את חלוקת המזון. לכן, הם מעוניינים לבחור גזבר יחיד, וכן ועדה מפקחת של שלושה חברים, שתשגיח על פעילותו של הגזבר. בכמה דרכים ניתן לבחור גזבר ועדה מפקחת, אם אסור שכל חברי הועדה יהיו מאותו הגזע של הגזבר.
6. סדרה $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ תיקרא חוקית אם כל איבר a_i שווה ל- 1 או ל- (-1).
 - א. בכמה סדרות חוקיות, סכום הסדרה $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ הינו 0?
 - ב. בכמה סדרות חוקיות, מכפלת הסדרה $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ הינה 1?
 - ג. בכמה סדרות חוקיות, לכל איבר $1 \leq k \leq n$ מתקיים:

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k| \leq 1$$