

תרגיל בית 2

התרגיל להגשה ביום ראשון 26.4.2020 בשעה 12 בצהריים במערכת ההגשות. יש להגיש קובץ PDF בלבד. שימו לב כי העבודה הינה בזוגות.

1. א. בכמה דרכים ניתן לבחור שני מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?
 ב. בכמה דרכים ניתן לבחור שלושה מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?
2. נתונה קבוצה D שהיא איחוד של 3 קבוצות זרות B, A ו-C.
 $|A|=n, |B|=m, |C|=k, A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$
 איברי קבוצה A צבועים בצבע אדום, איברי קבוצה B צבועים בצבע כחול ואיברי קבוצה C צבועים בצבע ירוק
 א. כמה תתי קבוצות מונוכרומטיות (חד צבעיות) קיימות בתוך D?
 ב. כמה תתי קבוצות תלת צבעיות קיימות בתוך D?
 ג. הוכיחו או הפריכו: מספר תתי הקבוצות הדו-צבעיות ב D הוא אי זוגי.
3. הוכיחו קומבינטורית את הזהויות הבאות:
 א. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = 3^n$
 ב. $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$
4. לסדר פסח של משפחת ישראלי הגיעו 52 אורחים. בקבוקי היין שברשות המארחים הם: 13 בקבוקי קברנה סובינון, 22 בקבוקי יין לבן חצי יבש ו-17 בקבוקי מוסקט של יין הגולן.
 א. רוצים לחלק לכל אורח בדיוק בקבוק יין אחד. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?
 ב. עבור סידור השולחן משפחת ישראלי קנתה 30 מפיות מסוג א ו-40 מפיות מסוג ב. בכמה דרכים ניתן לסדר את המפיות בשולחן (כאשר סה"כ משתמשים ב 52 מפיות בלבד)?
5. חשב את המקדמים הבאים:
 א. המקדם של ab^5c^3 בפיתוח של $(a+b+c+d)^9$
 ב. המקדם של a^5b^4c בפיתוח של $(2a-3b+c)^{10}$
 ג. המקדם של y^{24} בפיתוח של $(1+y^2+y^9)^{25}$
 ד. המקדם של x^{21} בפיתוח של $(1+x^5+x^8)^{100}$
6. כמה סדרות של n מספרים שלמים (a_1, \dots, a_n) יש המקיימים
 $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ ובנוסף $a_i < i$ לכל $1 \leq i \leq n$?
7. כדי לאפשר מעבר של כלי תחבורה מצרפת לאנגליה, חפרו שתי מנהרות - אחת למעבר משאיות בלבד, והשנייה למעבר מכוניות פרטיות בלבד. בכל מנהרה יש נתיב נסיעה אחד, ולא ניתן לעקוף. הציבו שומר שיהיה אחראי על שתי המנהרות. בכל פעם שכלי רכב נכנס או יוצא ממנהרה, השומר רושם בפנקסו, לפי הסדר, את סוג הרכב (מכונית או משאית) ואת כיוון נסיעתו. לדוגמה: "מכונית נכנסה", "משאית יצאה". בוקר גשום אחד האנגלים החליטו שהם חוסמים את הצד שלהם של המנהרות ו"שכחו" להודיע לצרפתים. כתוצאה מכך כל רכב שנכנס בצרפת למנהרה נסע עד לצד האנגלי, ולאחר שגילה שהצד האנגלי חסום נאלץ לשוב על עקבותיו בהילוך אחורי (reverse). במהלך כל יום נכנסו (ולבסוף יצאו) מהמנהרות n משאיות ו-k מכוניות פרטיות.
 א. כמה אפשרויות יש לרשימתו של הפקיד?
 ב. כמה אפשרויות יש לרשימתו של הפקיד אם יש מנהרה אחת בלבד, כלומר המכוניות והמשאיות עוברות כולן באותה המנהרה?