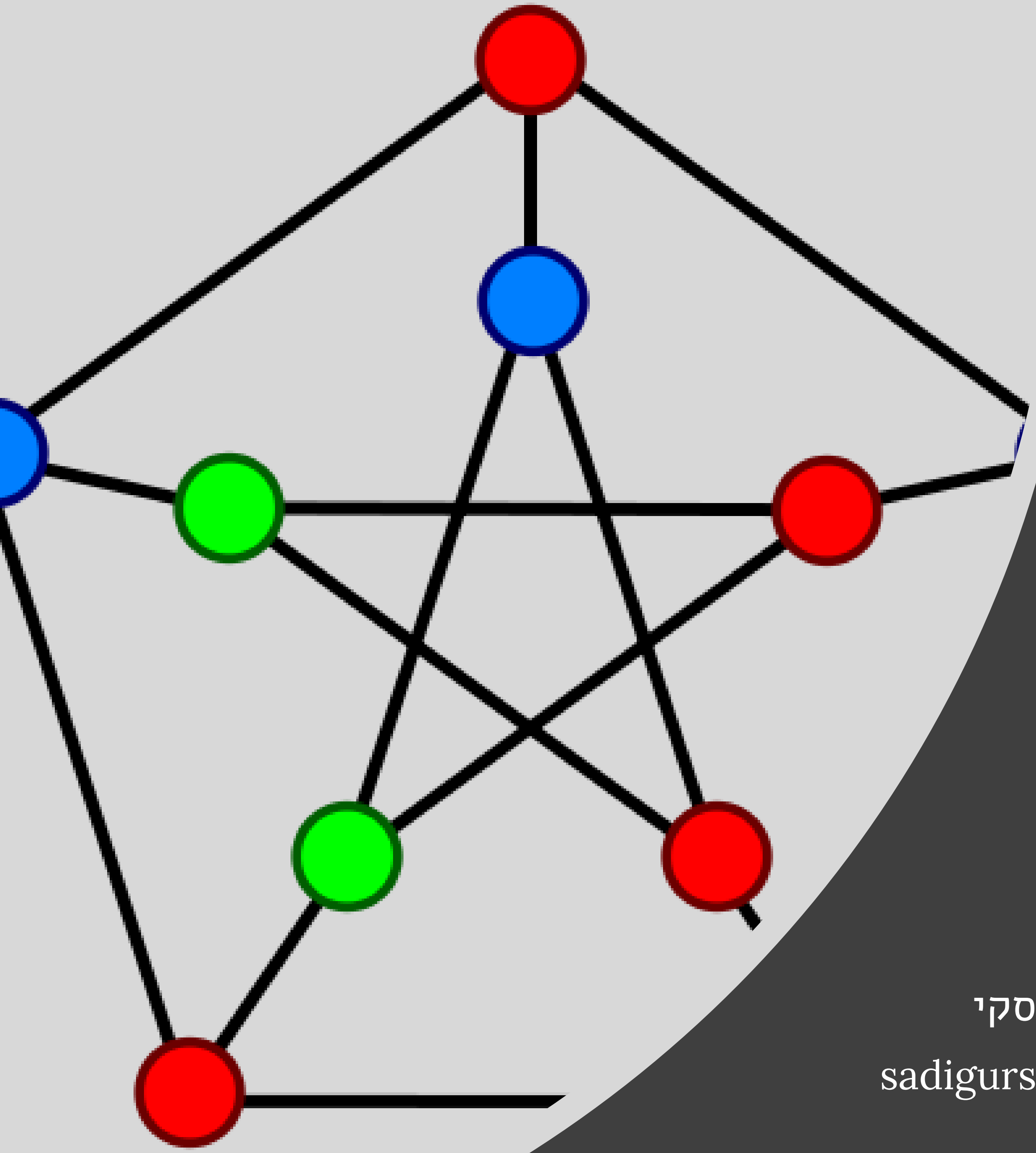

תגבור

שבוע 3

מני סדיגורסקי
sadigurs@post.bgu.ac.il

שאלה

קבוצה של 10 אנשים מתכנסים לדיון חיוני על ספסל ארוך (מאוד) ברחוב. הם מעוניינים לשבת אך בשל המצב עליהם לשמור על מרחק זה מזה. בכמה דרכים הם יכולים לשבת על ספסל באורך 40 מטרים, תוך כדי שמירה על הנוהל הדורש מרחק של לפחות 2 מטרים אחד מהשני? הנח כי ניתן לשבת רק במרחקים שלמים זה מזה וכי אדם יושב תופס מטר מהספסל.

תשובה

תחילה נחליט על **מיקום** הישיבה. נתייחס אל המרווחים כאל כדורים ואל האנשים כאל מחיצות. בלומר, מאחר והאנשים עצמם תופסים 10 מטרים תמיד, יש לנו 30 כדורים ו-10 מחיצות. לפי ההגבלה בין כל שתי מחיצות חייב להימצא לפחות שני כדורים ולכן תחילה "נשים" 18 כדורים בין המחיצות. נותרנו עם 12 כדורים שאותם עלינו לפזר ללא הגבלה נוספת בלומר $\binom{12+10}{10}$

כעת נותר לנו להחליט על **הסדר** שבו ישבו האנשים. מאחר ויש $10!$ אפשרויות לסידור זה נקבל בסך הכול $\binom{22}{10}10!$

שאלה

בכיתה של $2n$ תלמידים, חצי בנים וחצי בנות, בכמה דרכים ניתן

1. לחלק את הכיתה לזוגות הטרוגניים – כל צמד יכיל בן ובת?
2. לחלק את הכיתה לצמדים הומוניים – כל צמד שני בנים או שתי בנות?

תשובה

1. נסדר את הבנים בשורה. בעת כל סידור של הבנות יצור התאמה בין הבנים לבנות (הבן ה i והבת ה i יהוו צמד). מספר הסידורים האפשריים הוא $n!$.

שאלה

בביתה של 2n תלמידים, חצי בנים וחצי בנות, בכמה דרכים ניתן

1. לחלק את הביתה לזוגות הטרוגניים – כל צמד יכיל בן ובת?
2. לחלק את הביתה לצמדים הומוניים – כל צמד שני בנים או שתי בנות?

תשובה

2. נצמד תחילה את הבנים. יש $\binom{n}{2}$ אפשרויות לצמד הראשון. לאחר מכן, יש $\binom{n-2}{2}$ אפשרויות לצמד השני וכן הלאה עד הצמד האחרון. סה"כ

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}=\frac{n!}{2^{\frac{n}{2}}}$$

באופן דומה נקבל עבור הבנות ולכן בסך הכול מספר האפשרויות הוא

$$\left(\frac{n!}{2^{n/2}}\right)^2$$

אלא שספרנו כל סידור של הזוגות הללו כמה פעמים. כלומר בחירת הזוג משה ודוד ואז הזוג יוסי וחיים נספרה שוב כאשר תחילה בחרנו ביוסי וחיים ולאחר מכן במשה ודוד. כל זיווג נספר בדיוק $\left(\frac{n}{2}\right)!$ ולכן התשובה הסופית

$$\left(\frac{n!}{2^{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)!}\right)^2$$

שאלה

בהינתן מצולע בעל 12 קודקודים מובחנים, בכמה דרכים ניתן לבחור 3 מקודקודיו מבלי שייבחרו שניים סמוכים?

תשובה

נתייחס תחילה לבעיה באילו יש חשיבות לסדר הבחירה.

יש 12 אפשרויות לבחירת הקודקוד הראשון. לאחר מכן, יש 9 אפשרויות לבחירת הקודקוד השני המתחלקות ל2. ב2 מתוך 9 האפשרויות האלה, הקודקוד הנבחר הוא במרחק בדיוק 2 מהקודקוד הראשון. במקרה זה יש 7 אפשרויות לבחירת הקודקוד השלישי. בשאר האפשרויות (7) הקודקוד השני הנבחר במרחק גדול מ2 מהקודקוד הראשון. במקרה זה יש 6 אפשריות לבחירת הקודקוד השלישי.

את התוצאה צריך לחלק במספר הסידורים הפנימיים של הבחירות ביוון שאין חשיבות לסדר. סה"כ:

$$\frac{12 * (2 * 7 + 7 * 6)}{3!} = 112$$

שאלה

בכמה תתי קבוצות בנות 50 איברים של $[1,2,\ldots,300]$ ההפרש בין כל שני איברים:

1. הוא לפחות 2? (רמז: חשבו על חלוקת כדורים לתאים, כך שכל התאים, פרט לקיצוניים, אינם ריקים.)
2. מתחלק ב2 ללא שארית?

תשובה

1. ננסח בעיה שקולה לבעיה זו: בכמה סדרות בינאריות מאורך 300 שבנויות מ- 50 אחדות ו- 250 אפסים מתקיים שבין כל שני אחדות יש לפחות אפס? (חושבים על הקבוצה בבעיה המקורית בקבוצת המקומות בסדרה.) נחשוב על האחדות במחיצות שיוצרות 51 תאים. נשים בהתחלה אפס בכל אחד מ- 49 התאים הפנימיים. אז התשובה היא מספר הדרכים לחלק את 201 האפסים הנשארים ל- 51 התאים ללא הגבלות נוספות. לכן התשובה היא $\binom{251}{51} = \binom{201+51-1}{51}$.

שאלה

בבמה תתי קבוצות בנות 50 איברים של $[1,2,\ldots,300]$ ההפרש בין כל שני איברים:

1. הוא לפחות 2? (רמז: חשבו על חלוקת בדורים לתאים, כך שבל התאים, פרט לקיצוניים, אינם ריקים.)

2. מתחלק ב2 ללא שארית?

תשובה

2. זאת אומרת שבל המספרים בקבוצה זוגיים או שבולם אי-זוגיים. אז התשובה היא מספר תתי-הקבוצות בנות 50 איברים של הקבוצה $\{2,4,6,8,\ldots,300\}$ פלוס מספר תת-הקבוצות בנות 50 איברים של הקבוצה $\{1,3,5,7,\ldots,299\}$, בלומר $\binom{150}{50}+\binom{150}{50}$.

שאלה

הוכיחו קומבינטורית את הזהות הבאה: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

תשובה

בבמה דרכים ניתן לבחור שני נציגים מתוך קבוצה בת n נשים ו- n גברים?

אגף שמאל: כמספר הדרכים לבחור שני אנשים מתוך קבוצה בת 2n אנשים.

אגף ימין: כמספר הדרכים לבחור שתי נשים (מתוך n הנשים) ועוד מספר הדרכים לבחור שני גברים (מתוך n הגברים) ועוד מספר הדרכים לבחור זוג (מתוך 2n האנשים) המורכב מאישה אחת וגבר אחד.

שאלה

הוכח באופן קומבינטורי

$$\sum_{j=2}^{n+1}(j-1)(n-j)=\binom{n+2}{3}$$

תשובה

נחשב את מספר הדרכים לבחור 3 תלמידים מתוך כיתה בגודל n+2 בלי חשיבות לסדר וללא חזרות.

1. ע"פ הנוסחה שלמדנו $\binom{n+2}{3}$
2. נמספר את התלמידים מ1 עד n+2. נשים לב שכל בחירה של 3 תלמידים ניתן לסדר בסדר עולה (לפי המספור). נסמן ב j את מספר התלמיד האמצעי מבין השלושה. נשים לב כי $2\le j\le n+1$. אם תלמיד j הינו האמצעי מבין השלושה אזי יש j-1 אפשרויות לתלמיד ה"נמוך יותר" ו n-j אפשרויות לתלמיד ה"גבוה יותר". מאחר וזה נכון לכל בחירה של האמצעי הרי שבסך הכול נקבל

$$\sum_{j=2}^{n+1}(j-1)(n-j)$$

שאלה

הוכח באופן קומבינטורי

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

תשובה

נחשב את מספר הסדרות באורך n מעל $\{0,1,2\}$

1. לפי נוסחה באופן ישיר 3^n
2. נסמן ב i את מספר הספרות שאינן 2. לכל i ישנן $\binom{n}{i}$ אפשרויות היכן למקם את הספרות 0,1, לאחר מכן יש 2^i אפשרויות לבחירת הספרות במקומות אלו. בעת, כל שנותר הוא לשים במקומות שלא נבחרו את הספרה 2. משום כך נקבל סה"כ שמספר האפשרויות הוא

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i$$

The end ☺