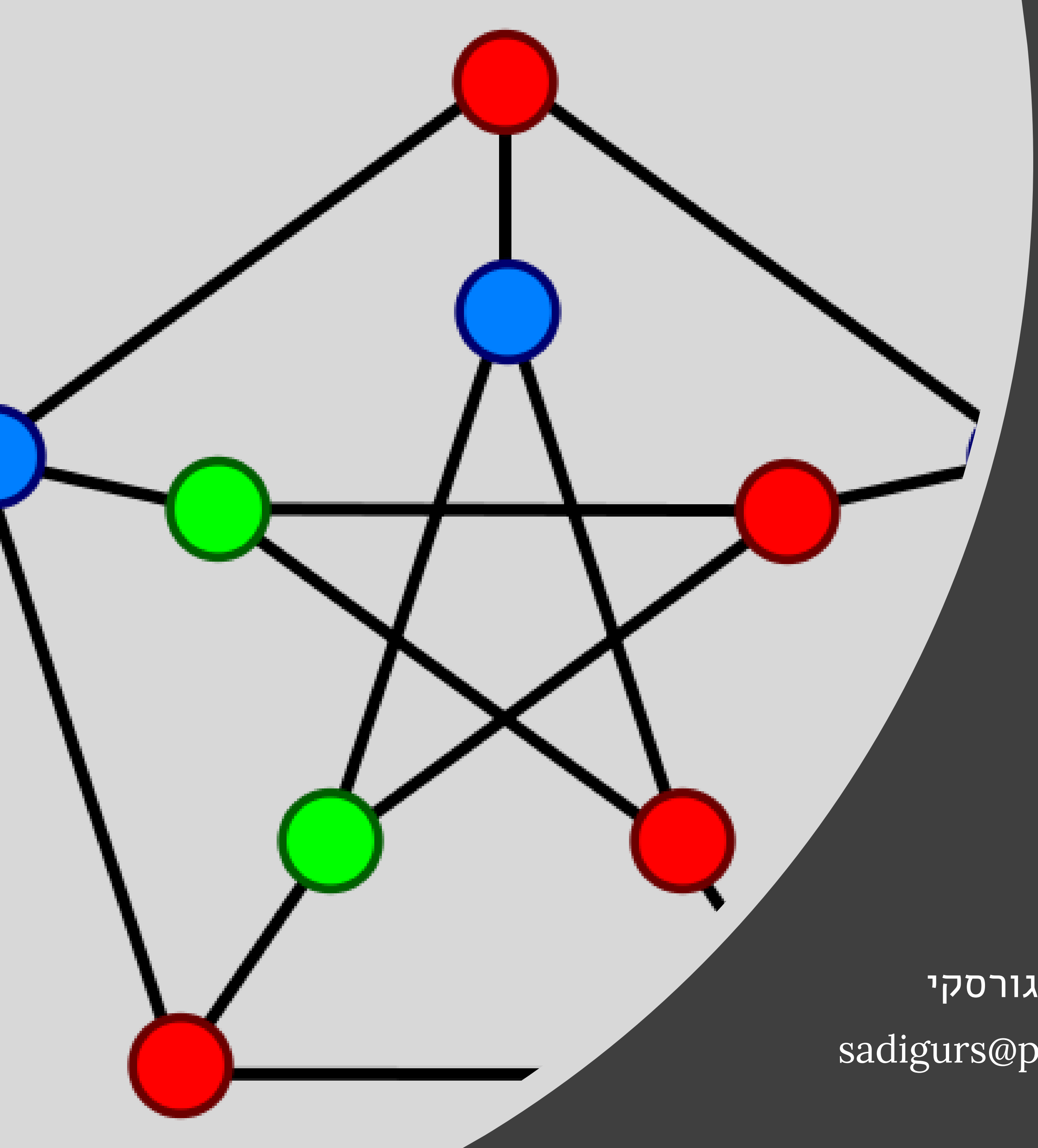

תגבור

שבוע 2

מני סדיגורסקי

sadigurs@post.bgu.ac.il

שאלה

כמה מספרים בין 1 ל 100 מתחלקים ב 7 או ב 13 ללא שארית?

תשובה

בטווח הנתון ישנם $14 = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor$ מספרים שתמחלקים ב 7 ללא שארית. כמו כן ישנם $\left\lfloor \frac{100}{13} \right\rfloor$ $= 7$ מספרים המתחלקים ב 13 ללא שארית. נסמן את קבוצת המספרים שמחלקים ב 7 ללא שארית ב A ואת קבוצת המספרים המתחלקים ב 13 ללא שארית ב B. נשים לב כי A ו B אינן זרות משום ש $91 \in A \cap B$ ולכן לא נוכל להשתמש בעיקרון הסכום. אבל אם נסמן $A' = A$ $\setminus \{91\}$ ובנוסף $B' = B \setminus \{91\}$ נקבל כי A’ ו B’ זרות ולכן, על פי עיקרון הסכום $|A' \cup B'|$ $19 = |A| - 1 + |B| - 1 = |A'| + |B'| =$. בעת כל שנותר הוא להשתמש בעיקרון הסכום פעם נוספת ולקבל כי

$$|A \cup B| = |(A' \cup B') \cup \{91\}| = 19 + 1 = 20$$

שאלה

תהי קבוצה S ותת קבוצה $A \subseteq S$ כלשהי. חשבו את מספר הדרכים לבחור שתי תתי-קבוצות של S כך שחיתוכן הוא בדיוק A.

תשובה

נסמן את שתי תתי הקבוצות המבוקשות ב B,C. כדי לבחור כראוי את B,C עליהן להכיל את כל אברי A ובנוסף עלינו לבחור אילו איברים נוספים יהיו בהן. כלומר עלינו לבחור עבור כל אחד מהן אילו מבין $|S \setminus A|$ האברים יהיו בו. נעשה זאת על ידי כך שלכל איבר ב $S \setminus A$ נחליט האם הוא ב B, ב C או באף אחת מבין השתים. כלומר לכל אחד מאברי $S \setminus A$ יש 3 אפשרויות ולכן יש בסך הכל $3^{|S \setminus A|}$. נשים לב שבתהליך הנ"ל ספרנו פעמיים כל בחירה (כל בחירה של B,C יכולה להתקבל גם בבחירה של C,B) למעט בחירת A=C=B (כלומר לבחור בנוסף לA את הקבוצה הריקה) ולכן נחסר 1 ונחלק ב 2 ואז נוסיף את ה1 חזרה. כלומר בסך הכל מספר האפשרויות הוא

$$\frac{3^{|S \setminus A|} - 1}{2} + 1$$

שאלה

בשפה האנגלית יש 21 אותיות רגילות ו5 אותיות ניקוד. בשאלה זו נתייחס רק לאותיות קטנות (lower case)

- א- כמה סיסמאות באורך 10 תוויים בדיוק, המרוכבות מאותיות ומספרים אפשר להרכיב?
- ב- כמה סיסמאות באורך 10 תוויים בדיוק, המרוכבות מאותיות ומספרים, הכוללות לפחות אות ניקוד אחת, אפשר להרכיב?

תשובה

- א- לכל תו יש 26+10 אפשרויות ולכן נקבל $36 \cdot 36 \cdot \ldots \cdots 36 = 36^{10}$ אפשרויות
- ב- נסמן ב A את אוסף כל הסיסמאות האפשרויות ללא כל הגבלה. נסמן ב B את אוסף הסיסמאות ש**לא** מבילות אף אות ניקוד. מסעיף א אנו יודעים כי $|A| = 36^{10}$. מספר האפשרויות לסיסמה ללא אות ניקוד הוא למעשה $(36-5) \cdot (36-5) \cdot \ldots \cdots (36-5)$ $= 31^{10}$ ולכן נקבל כי מספר הסיסמאות שבוללות לפחות אות ניקוד אחת, שהיא למעשה הקבוצה $A \setminus B$ מקיימת $|A \setminus B| = |A| - |B| = 36^{10} - 31^{10}$

שאלה

תהי S קבוצת מספרים טבעיים כך ש |S|=n. הוכיחו כי קיימת תת-קבוצה לא ריקה $A \subset S$ כך שסכום איברי A הינו כפולה של n.

תשובה

נסמן את אברי הקבוצה $\mathrm{S} = \{\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}\}$

נתבונן בתתי הקבוצות הבאות

$$\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_1, \dots, a_n\}$$

אם סכום אחת הקבוצות הללו הינו כפולה של n סיימנו. אחרת נחלק את הקבוצות לתאים לפי שארית חלוקת הסכום שלהם ב n.

יש לנו n קבוצות אבל רק n-1 שאריות אפשרויות (מאחר ושארית 0 נשללה) ומעיקרון שובך היונים קיימות שתי קבוצות $\{a_1, a_2, \dots a_i\}$ ו $\{a_1, a_2, \dots a_j\}$ ששארית החלוקה של סכומן שווה. נניח בה"כ כי i<j ונקבל שהקבוצה $\{a_i, a_{i+1}, \dots a_j\}$ הינה בעלת סכום שמתחלק ב n ללא שארית.

שאלה

ממקמים 27 ריבועים בעלי אורך צלע 1 בתוך מעגל עם רדיוס באורך 2, כך שכל ריבוע מוכל במעגל. הוכיחו כי יש נקודה ששייכת ל 3 ריבועים שונים

תשובה

נצבע כל ריבוע בצבע ייחודי (יתכנו נקודות שצבועות במס' צבעים). נניח בשלילה שכל נקודה צבועה לכל היותר ב 2 צבעים. כלומר כל נקודה שייכת לכל היותר ל 2 ריבועים שונים, ולכן סכום השטחים הצבועים על ידי כל 27 הריבועים חסום על ידי פעמיים שטח המעגל. שטח המעגל הוא $13 < 4\pi = \pi \cdot 2^2$. סכום שטחי הריבועים הוא 27. קיבלנו $26 < 27$, סתירה. לכן יש נקודה הצבועה ב 3 צבעים לפחות, ובפרט שייכת ל 3 ריבועים.

שאלה

יהי n מספר אי-זוגי ותהי σ תמורה של הקבוצה $A = \{1,2,3\cdots,n\}$ (כלומר $\sigma : A \longrightarrow A$ פונקציה חד-חד ערכית ועל). הראו שהמספר $M = (\sigma(1) - 1)(\sigma(2) - 2)(\sigma(3) - 3)\cdots(\sigma(n) - n)$ הוא מספר זוגי.

תשובה

היות ו- n מספר אי- זוגי, נסמן $n = 2k + 1$, אז ב- A ישנם k מספרים זוגיים ו$k + 1$ - מספרים אי-זוגיים, לכן ע"פ עיקרון שובך היונים קיים בתמורה σ לפחות איבר אחד אי-זוגי שהתמונה שלו גם היא מספר אי-זוגי. לכן ההפרש שלהם הוא זוגי ובפרט M זוגי.

שאלה

הוכיחו:

א- יהי n מספר שלם חיובי ונניח ש- n גברים ו- $n+1$ נשים יושבים ב- $2n+1$ כסאות שמסודרים סביב לשולחן עגול. אז יש שתי נשים שיושבת זו ליד זו.

ב- 75 גברים ו- 75 נשים יושבים בכסאות שמסודרים סביב לשולחן עגול, אז יש מישהו או מישהי שיושבים בין שתי נשים. (רמז: נניח שהכסאות צבועים בכחול ואדום לסירוגין.)

תשובה

א- נושיב את כל הגברים במעגל. היות וישנם n גברים (שיושבים במעגל) יש בניהם לכל היותר n מרווחים בהם ניתן להושיב נשים. ע"פ עיקרון שובך היונים שהמרווחים בין הגברים הם השובכים והנשים הן היונים בהכרח יהיו 2 נשים שישבו באותו מרווח.

ב- ע"פ הרמז, אם נחלק את הנשים לפי צבע הכיסא עליו הן יושבות נקבל שעל צבע אחד יושבות לפחות 38 נשים. נניח בלי הגבלת הכלליות שמדובר בצבע האדום. נסתכל על ההושבה מצומצמת לכסאות האדומים (נשים לב שעדיין מדובר בהושבה במעגל). יש לנו 38 נשים, ו37 בני אדם נוספים (גברים ונשים) ע"פ סעיף א' בהכרח נמצא שתי נשים שיושבות על כסאות אדומים צמודים, בפרט יש בינהן כסא כחול. מי שיושב בכסא זה בהכרח נמצא בין שתי נשים.

שאלה – בונוס 😂

בכמה דרכים שונות ניתן לסדר קובייה הונגרית תקנית?

תשובה (ללא הסבר)

$$\frac{1}{2} \cdot (8! \cdot 3^7) \cdot (12! \text{ x } 2^{11})$$
$$= 43{,}252{,}003{,}274{,}489{,}856{,}000$$

להמחשה: אם נערום את כל הסידורים האפשריים זה מעל זה המגדל יהיה בגובה של בערך 261 שנות אור. להשוואה, הכוכב הקרוב ביותר למערכת השמש, פרוקסימה קנטאורי, מרוחק מאיתנו כ4 שנות אור.