<u>תרגול 6- נוסחאות נסיגה- ניסוח ופתרון</u>

<u>חלק 1: ניסוח נוסחאות נסיגה.</u>

<u>שאלה 1</u>:
נתון לוח ונתונים מספר לא מוגבל של אריחים בגודל $1x1$, $1x2$, (משבצת או שתי משבצות). מצאו נוסחת נסיגה המתארת את מספר הכיסויים האפשרי ללוח ע"י האריחים בהינתן ש:

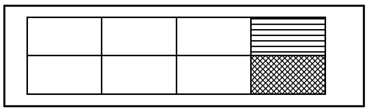
א. הלוח בגודל $1\ x\ n$

ב. הלוח בגודל $2\ x\ n$

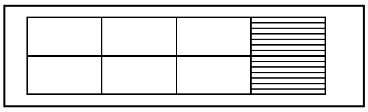
<u>פתרון</u>:
א. תחילה נסמן: a_n – מספר הכיסויים האפשרי ללוח בגודל $1\ x\ n$. ניווכח שזוהי בעיה המתוארת ע"י נוסחת נסיגה שהפתרון הכללי שלה זהה לפתרון הכללי של סדרת פיבונאצ'י – נתבונן באריח שמכסה את המשבצת הימנית ביותר. אם זהו אריח באורך 1 נשאר לנו לכסות $n-1$ משבצות, ואילו אם הנחנו אריח באורך 2 אזי נשאר לנו לכסות $n-2$ משבצות. ערכי ההתחלה הם $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ והנוסחה הינה $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

ב. נסמן ב- a_n את מספר הכיסויים האפשרי ללוח בגודל $2\ x\ n$. נתבונן באופן הכיסוי של העמודה הימנית ביותר. בבואנו לנסח נוסחת נסיגה לבעיה נתקל בקושי כאשר נשקול את המקרה בו אריח בגודל 2 הונח בצורה אופקית, מה שיוצר חוסר סימטריה – בשורה אחת כיסינו יותר משבצות מבשורה השנייה. נסמן אם כן ב- b_n את מספר הריצופים האפשרי של לוח עם 2 שורות, בשורה הראשונה $n-1$ משבצות ובשנייה n.

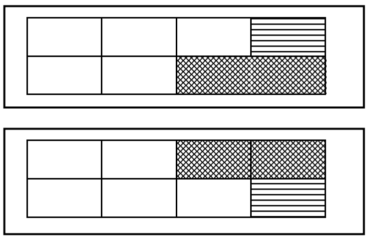
בהינתן לוח נבחן את כל האפשרויות לכסות את העמודה הראשונה שלו:



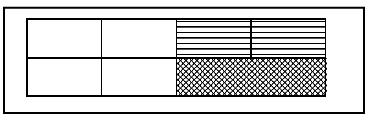
שני אריחים בגודל 1x1, מותיר a_{n-1} אפשרויות להמשך



אריח בגודל 1x2 (שמונח בצורה אנכית),
מותיר a_{n-1} אפשרויות להמשך



אריח בגודל 1x1 ואריח בגודל 1x2. מותיר $2b_{n-1}$ אפשרויות להמשך (יש לנו 2 אפשרויות לכך, כמתואר באיור מימין).



2 אריחים בגודל 1x2. מותיר a_{n-2} אפשרויות להמשך.

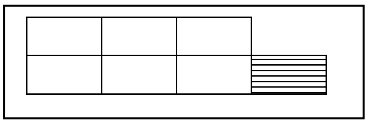
כלומר, בסה"כ קיבלנו ש-

$$a_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + a_{n-2}$$

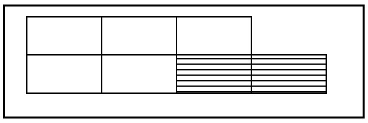
(כיוון שכיסינו את כל הדרכים האפשרויות לכסות את העמודה הראשונה, בהכרח כל כיסוי חוקי מכסה את העמודה באחד מהאופנים הללו).

באותו אופן, בהינתן לוח המתאים ל- $\mathrm{b_n}$ (כלומר כזה שחסרה לו משבצת בעמודה הראשונה), מהן האפשרויות לכסות את העמודה החסרה?

אריח בגודל $1x1$. ישנן a_{n-1} אפשרויות להמשך.

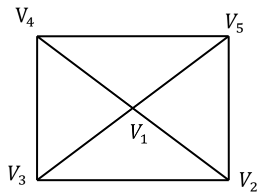


אריח בגודל $1x2$. ישנן $\mathrm{b_{n-1}}$ אפשרויות להמשך.



כלומר נקבל ש- $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$
כעת, נמצא נוסחה ל - a_n שלא תלויה בסדרה b_n:
מהשוויון הראשון שקיבלנו, נקבל כי $b_{n-1} = \frac{1}{2}a_n - a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$,
נעלה את האינדקס ב-1 ונקבל- $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}$,
נציב בנוסחה השנייה, $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, את הביטויים לעיל, ונקבל:
$\frac{1}{2}a_{n+1} - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n - a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$, נפשט ונקבל
$a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1} - a_{n-2}$. נוריד את האינדקס ב – 1 ונקבל את נוסחת הנסיגה הבאה:
$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$. ערכי ההתחלה הינם $a_3 = 22, a_2 = 7, a_1 = 2$

<u>שאלה 2</u>:
G הוא הגרף הבא:



מצאו נוסחת נסיגה למספר הטיולים המתחילים ב- v_1 באורך n (צלעות)?
(*) טיול – סדרה של קודקודים, כאשר כל 2 קודקודים עוקבים מחוברים בצלע.

<u>פתרון</u>:
נסמן ב – a_n את מס' הטיולים באורך n צלעות המתחילים בקודקוד- $\mathrm{v_1}$. נסמן ב- b_n^i את מספר הטיולים באורך n המתחילים בקודקוד- v_i עבור $\mathrm{i = 2,3,4,5}$.
קל להיווכח משיקולי סימטריה ש- $b_n^2 = b_n^3 = b_n^4 = b_n^5$. נסמן גודל זה פשוט כ- b_n.
טיול שמתחיל בקודקוד $\mathrm{v_1}$, הקשת הראשונה שלו מוליכה אותו אל אחד הקדקודים האחרים ,כלומר,
$a_n = 4b_{n-1}$ (יש 4 אפשרויות לקשת הראשונה).

טיול שמתחיל בקדקוד שאיננו v_1, יש לו 2 קשתות המוליכות ממנו לקדקודים שאינם v_1 וקשת ל- v_1, כלומר $b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1}$. ניפטר מגורמי ה- b-ים ע"י הצבה ונקבל $\left(\frac{2}{4}\right)a_n + a_{n-1}$ $= \left(\frac{1}{4}\right)a_{n+1}$, כלומר $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2}$.

<u>שאלה 3:</u>

מצאו נוסחת נסיגה המתארת את מספר המילים מעל $\{0,1\}$ באורך n שאינן כוללות את הרצף 111?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב- a_n את מספר המילים הבינאריות באורך n שאינן כוללות את הרצף 111.

קיימים שלושה סוגים של מילים בa_n :

- מילים שמסתיימת ב-011.
- מילים שמסתיימת ב-01.
- מילים שמסתיימות ב-0.

קל להיווכח שכל מילה ב a_n היא מאחד הסוגים לעיל וכן שמילה מסוימת שייכת לסוג אחד בלבד.

כעת נשים לב ש:

- מילה ב a_n שמסתיימת ב011 מתקבלת מהוספת הסיפא 011 למילה ב-a_{n-3}
- מילה ב a_n שמסתיימת ב01 מתקבלת מהוספת הסיפא 01 למילה ב-a_{n-2}
- מילה ב a_n שמסתיימת ב0 מתקבלת מהוספת הסיפא 0 למילה ב-a_{n-1}

ולכן:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$

ערכי ההתחלה הינם $a_3 = 7$ $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.,

<u>שאלה 4:</u>

נתונה נוסחת הנסיגה: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ עם ערך ההתחלה: $a_0 = 1$.

מצאו פתרון כללי לנוסחת הנסיגה באמצעות שיטת ההצבה.

<u>פתרון:</u>

נפתח את הביטוי a_n:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2(2(2a_{n-3} + 1) + 1) + 1 = \cdots =$$
$$\underbrace{2(2(\dots(2}_{n\text{ פעמים}}\, a_0 + \underbrace{1) + 1) \dots + 1}_{n\text{ פעמים}} = 2^n + 2^{n-1} + .. + 1 = 2^{n+1} - 1$$

נוכיח באינדוקציה את נכונות הפתרון:

<u>בסיס</u>: $a_0 = 1 = 2^{0+1} - 1$, כנדרש.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח נכונות עבור $n - 1$ ונוכיח עבור n.

<u>צעד</u>: נתבונן בנוסחה: $a_n = 2^{n+1} - 1$.

לפי הנחת האינדוקציה, מתקיים: $a_{n-1} = 2^n - 1$.

נציב בנוסחה ונקבל: $a_n = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$ כנדרש.

חלק 2: פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות.

הגדרות:

נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים הינה נוסחת נסיגה מהצורה הבאה:

$$\mathrm{f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \cdots + c_r f(n-r)}$$

כאשר $c_1, c_2, \dots, c_r$ הינם מספרים ממשיים קבועים.

הפולינום האופייני של נוסחת נסיגה כזו הוא:

$$P(x) = x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r$$

המשוואה האופיינית של נוסחת הנסיגה היא:

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r = 0$$

פתרון נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית:

כדי למצוא פתרון לנוסחת נסיגה כזו, נבצע מספר שלבים:

1. נמצא את שורשי הפולינום האופייני $\mathrm{x_1, \dots, x_t}$ (כלומר, נפתור את המשוואה האופיינית).
2. במידה וישנם r שורשים שונים, הפתרון הכללי יהיה מהצורה:
$$f(n) = A_1(x_1)^n + \dots + A_r(x_r)^n$$
3. במידה וישנם שורשים ולהם ריבוי גדול מ-1, נסמן ב-$\mathrm{d_i}$ את הריבוי של x_i במשוואה, אזי הפתרון הכללי יהיה מהצורה:
$$f(n) = A_1(x_1)^n + nA_2(x_1)^n + \cdots + n^{d_1-1}A_{d_1}(x_1)^n + A_{d_1+1}(x_2)^n + nA_{d_1+2}(x_2)^n + \cdots$$

נשתמש ב- r ערכי התחלה ידועים ונקבל מערכת של r משוואות מהן נחלץ את $\mathrm{A_1, \dots, A_r}$.

הערה:

פריקות מעל $\mathbb{Z}$ ו - $\mathbb{Q}$:

בהינתן פולינום $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ כש- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, אזי אם קיים לו שורש רציונלי $\frac{c}{d}$ כך ש – $c, d \in \mathbb{Z}$ זרים ו – $d \neq 0$ אזי בהכרח d מחלק את a_n ו – c מחלק את a_0.

<u>שאלה 5:</u>

מצאו את הפתרון הכללי עבור נוסחאות הנסיגה הבאות:

א. $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$

ב. $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

ג. $a_n = 9a_{n-1} - 26a_{n-2} + 24a_{n-3}$

ד. בעבור סעיפים א, ב, פתרו את נוסחאות הנסיגה עבור ערכי ההתחלה : $a_0 = 1, a_1 = 3$

<u>פתרון:</u>

בכל המקרים יש לנו נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים, לכן נמצא את השורשים של המשוואה האופיינית של כל אחד מהם, מהם נוכל לבנות את הפתרון הכללי.

סעיף א':

המשוואה האופיינית הינה $x^2 - 7x + 12 = 0$, השורשים שלה הם 3 ו-4 ולכן הפתרון הכללי של הנוסחה הוא מהצורה $a_n = 3^n A + 4^n B$.

סעיף ב':

המשוואה האופיינית הינה $x^2 + 4x + 4 = 0$, יש לה שורש יחיד, -2, בריבוי 2. לכן הפתרון הכללי הוא מהצורה $a_n = (-2)^n A + (-2)^n nB$.

סעיף ג':

המשוואה האופיינית הינה $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. מקרה זה מסובך יותר מן המקרים הקודמים שכן הפולינום ממעלה שלישית – נחפש שורש (פתרון) ע"י ניחוש:

- ננחש ש-1 הינו פתרון של המשוואה: נציב 1 ונקבל $1 - 9 + 26 - 24 = 0 \to -6 = 0$, לא נכון.
- ננחש ש-2 הינו פתרון של המשוואה: נציב 2 ונקבל $8 - 36 + 52 - 24 = 0 \to 0 = 0$, נכון.

כעת שאנו יודעים ש- 2 הוא שורש של המשוואה, נחלק את הפולינום האופייני ב- $(x - 2)$ כדי לקבל רכיב שהוא פולינום ממעלה שנייה. נקבל $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x-2)(x^2 - 7x + 12)$. אם כן למשוואה 3 שורשים שונים 2,3,4 ולכן הפתרון הכללי הינו מהצורה $a_n = 2^n A + 3^n B + 4^n C$.

סעיף ד':

מצאנו כבר את המשוואה האופיינית של כל אחת מהנוסחאות. כעת נציב את ערכי ההתחלה – נקבל 2 משוואות בשני נעלמים וע"י פתרון שלהן נמצא את ערכי A ו- B המתאימים:

עבור סעיף א': (<u>נזכר</u>: $a_n = 3^n A + 4^n B$)

$$a_0 = 1 = 3^0 A + 4^0 B \to A = -B + 1$$
$$a_1 = 3 = 3^1 A + 4^1 B \to$$
$$3 = 3(-B + 1) + 4B = B + 3 \to$$
$$B = 0 \to A = 1$$
$$a_n = 3^n$$

עבור סעיף ב': (<u>נזכר</u>: $a_n = (-2)^n A + (-2)^n nB$)

$$a_0 = 1 = (-2)^0 A + (-2)^0 * 0 * B \to A = 1$$
$$a_1 = 3 = (-2)^1 A + (-2)^1 * 1 * B \to$$
$$3 = -2 * 1 - 2B \to$$
$$B = -\frac{5}{2}$$
$$a_n = (-2)^{n-1}(5n - 2)$$

<u>שאלה 6:</u>

מצאו את פתרונות 2 הנוסחאות הבאות:

$a_n = -2a_{n-1} + 4b_{n-1}$ ו- $b_n = -5a_{n-1} + 7b_{n-1}$

כאשר ערכי ההתחלה הינם $a_1 = 4$, $b_1 = 1$.

<u>פתרון:</u>

ראשית, נשים לב שיש כאן 2 נוסחאות נסיגה התלויות זו בזו. נרצה לבטא את איברי a_n רק ע"י איברי הסדרה (להפריד מהסדרה השנייה). נשים לב ש- $4b_{n-1} = a_n + 2a_{n-1}$, נעלה את האינדקס ב-1 ונקבל: $4b_n = a_{n+1} + 2a_n$, כלומר: $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)a_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)a_n$

נציב במשוואה השנייה ונקבל ש- $\left(\frac{1}{4}\right)a_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)a_n = -5a_{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)a_n + \left(\frac{14}{4}\right)a_{n-1}$.

נסדר איברים ונשנה אינדקסים ונקבל ש- $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.

המשוואה האופיינית היא $x^2 - 5x + 6 = 0$, ושורשיה הם $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

לכן הפתרון הכללי של הנוסחה הינו מהצורה $a_n = 2^n A + 3^n B$.

חסר לנו ערך התחלה עבור הנוסחה (יש לנו רק את a_1) ולכן נחלץ את a_2 מהנוסחה הראשונה: $a_2 = -2a_1 + 4b_1 = -8 + 4 = -4$.

נמצא עתה ערכי A ו-B אשר עבורם הפתרון יהיה נכון עבור a_1, a_2. נקבל את 2 המשוואות הליניאריות הבאות:

$$a_1 = 2^1 A + 3^1 B = 4 \to A = -\left(\frac{3}{2}\right)B + 2$$

$a_2 = 2^2A + 3^2B = -4 \rightarrow 4\left(2 - \left(\frac{3}{2}\right)B\right) + 9B = -4 \rightarrow 8 + 3B = -4$

נקבל אם כן ש- $A = 8B = -4$,, והפתרון לנוסחה הוא:

$a_n = 2^n * 8 - 3^n * 4 = 2^{n+3} - 3^n * 4$.

כעת, נותר לחשב את הנוסחה השנייה. נעשה זאת בעזרת הנוסחה: $4b_n = a_{n+1} + 2a_n$ (ע"י הצבה):

$$b_n = \left(\frac{1}{4}\right)(2^{n+4} - 3^{n+1} * 4 + 2^{n+4} - 3^n * 8) = \left(\frac{1}{4}\right)(2^{n+5} - 3^n * 20)$$
$$= 2^{n+3} - 3^n * 5$$

<u>שאלה 7:</u>

נתונה מטריצה ריבועית A בגודל $p\ x\ p$ ($p \geq 2$), כאשר ערכי המטריצה הם 0 באלכסון הראשי ו-1 במקומות האחרים. תארו את A^k.

דוגמא של A עבור המקרה $p = 5$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

נרצה לראות מהו הקשר בין איברי המטריצה A לאחר העלאתה בחזקה לבין איברי המטריצה המקורית. נסמן את ערך איברי האלכסון במטריצה A^c בתור a_c ואת האיברים בכל יתר המטריצה כ b_c.

ניתן לראות ש- $b_1 a_1$, מוגדרים נכון (שהרי כל איברי האלכסון שווים וכל האיברים האחרים שווים), אולם לא ברור מיידית שאכן ניתן להגדיר הגדרה כזו, שכן לא מובטח לנו שאכן שוויונות אלו מתקיימים לאחר ההעלאה בחזקה. טענת העזר הבאה תראה בין היתר שהגדרה זו הינה נכונה:

טענת עזר– לכל $c \geq 1$ מתקיים: $a_{c+1} = (p-1)b_c$, $b_{c+1} = (p-2)b_c + a_c$

הוכחה– באינדוקציה (רגילה) על c.

<u>מקרה בסיס</u> : $c = 1$.

נתבונן ב- A^2:

נסמן ב- $A_{i,j}$ תוצאה של מכפלה סקלארית של שורה i ועמודה j.

נבחן את איברי האלכסון: אם $i = j$, $A_{i,i}$ הינו תוצאה של הכפלת השורה הi בטור הi. כיוון שעל האלכסון הראשי ישנה קואורדינטה יחידה בה שני הווקטורים מכילים אפס, וזו בדיוק הקואורדינטה ה–i בשניהם, ויתר ההכפלות הינן של $1 * 1$, המכפלה הינה $(p-1)$ כלומר:

$a_2 = (p-1) * 1 = (p-1)b_1$.

כעת, נבחן את שאר איברי המטריצה: כאשר $i \neq j$ ישנן 2 קואורדינטות בהן באחד מהווקטורים מופיע 0. יתר הרכיבים הם 1, ועל כן המכפלה היא $b_2 = (p-2) * 1 + 0 = (p-2)b_1 + a_1$ כנדרש.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח נכונות עבור c ונראה נכונות עבור $c + 1$.

<u>צעד</u>: נתבונן על A^{c+1} בתור מכפלה של $A * A^c$. עפ"י הנחת האינדוקציה, אנו יודעים שאיברי A^c אכן מוגדרים נכון ע"י הסדרה. מאותם שיקולים כמו במקרה הבסיס נקבל את התוצאה הנדרשת.

נתבונן בערך $(A^{c+1})_{i,j}$ כלשהו במטריצה שהתקבלה מההכפלה. נתבונן בווקטור שורה i במטריצה A^c. עפ"י הנחת האינדוקציה במיקום ה–i יש את הערך a_c ובשאר המיקומים יש את הערך b_c.

- אם $i = j$, אז את a_c נכפיל ב–0 ואת שאר הקואורדינטות שערכן b_c ב – 1,
לכן $a_{c+1} = (p-1)b_c$.

- אם $i \neq j$, אזי נכפיל את a_c ב – 1, את הקואורדינטה ה- j ב-0 ואת שאר הקואורדינטות שערכן b_c ב-1 ולכן $b_{c+1} = (p-2)b_c + a_c$, כנדרש.

כיוון ש- p הוא פרמטר קבוע, $(p-2)(p-1)$, הם מספרים קבועים ויש לנו נוסחאות נסיגה במקדמים קבועים.
נבטא את a_c באמצעות איברי הסדרה שלו בלבד. ע"י הצבות ושינויי אינדקסים נקבל ש-
$a_c = (p-2)a_{c-1} + (p-1)a_{c-2}$. המשוואה האופיינית של נוסחת הנסיגה הזו היא
$x^2 - (p-2)x - (p-1) = 0$.
נמצא את שורשי המשוואה האופיינית:

$$\frac{p-2\pm\sqrt{(p-2)^2+4(p-1)}}{2} = \frac{p-2\pm\sqrt{p^2}}{2} = \frac{p-2\pm p}{2}$$

השורשים הם -1 ו- $(p-1)$. הפתרון הכללי הוא מהצורה $a_c = (p-1)^c A + (-1)^c B$.
תנאי ההתחלה שלנו הם $a_1 = 0$, $a_2 = (p-1)$, נחפש את הפתרון המתאים:

$$a_1 = (p-1)A - B = 0 \rightarrow B = (p-1)A$$
$$a_2 = (p-1)^2 A + B = (p-1) \rightarrow$$
$$(p-1)^2 A + (p-1)A = (p-1) \rightarrow$$
$$(p-1)A + A = 1 \rightarrow$$
$$A = \frac{1}{p}$$

לכן $B = \frac{p-1}{p}$ והפתרון הינו $a_c = \left(\frac{p-1}{p}\right)[(p-1)^{c-1} + (-1)^c]$.
נמצא את b_c ע"י הצבת הפתרון ב- $b_c = \frac{a_{c+1}}{p-1}$ ונקבל ש- $b_c = \left(\frac{1}{p}\right)[(p-1)^c + (-1)^{c+1}]$.
כעת, אין כל קושי לתאר את ערכי המטריצה A^k, שכן ערכי האלכסון הראשי שלה הם a_k וערכי יתר איברי המטריצה הינם b_k.