פתרון עבודת בית מספר 1

1. $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$
2. א. נשים לב כי מתקיים: $237600 = 2^5 * 3^3 * 5^2 * 11$. לכן מספר האפשרויות להרכיב מחלק זוגי של 237600 הינו $5 * 4 * 3 * 2$.
ב. ראשית, עלינו לחלק 1+2+3+4+5 יחידות למשתנים x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. נותרו לנו 45 יחידות, לחלק ל- 5 משתנים. השאלה שקולה לכמה אפשרויות יש לשים 4 מחיצות בין 45 כדורים, כלומר $\binom{45+4}{4}$.

3. א. המילה COMPUTER מכילה 8 אותיות שונות זו מזו. ישנן 8 אפשרויות לבחירת האות הראשונה במילה, 7 אותיות לבחירת האות השנייה, וכו'. לכן, בסה"כ, ניתן להרכיב !8 מילים בנות 8 אותיות, $8 \cdot 7!$ מילים בנות 7 אותיות, וכן הלאה. אם כן, מספר המילים שניתן להרכיב הינו

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{8!}{i!} = \frac{8!}{\sum_{i=1}^{8} i!}$$

ב. המילה BALL מכילה 4 תווים, ושלוש אותיות שונות. ישנם !4 סידורים אפשריים ל-4 אותיות שונות. מכיוון שבקבוצה זו כל מילה נספרת פעמיים, בסה"כ ישנם $\frac{4!}{2}$ מילים אפשריות בנות 4 תווים.

4. א. נושיב את כל הגברים במעגל. היות וישנם n גברים (שיושבים במעגל) יש בניהם לכל היותר n מרווחים בהם ניתן להושיב נשים. ע"פ עיקרון שובך היונים שהמרווחים בין הגברים הם השובכים והנשים הן היונים בהכרח יהיו 2 נשים שישבו באותו מרווח.
ב. נצבע את הכסאות באדום וכחול לסרוגין. ממשפט שובך היונים, קיים צבע עליו יושבות לפחות 16 נשים. בה"כ נאמר שישנן לפחות 16 נשים היושבות על כסאות אדומים. מכיוון שיש בסה"כ 31 כסאות אדומים, נסיק שבהכרח קיימים שני כסאות אדומים סמוכים (המופרדים על ידי כסא כחול אחד בלבד) עליהם יושבות נשים. לכן, בהכרח קיים מישהי/ו (גבר או אישה) היושב/ת בין שתי נשים.

5. א. נתייחס להוביטים כאילו הם ישות אחת. מספר הדרכים להושיב 6 דמויות במעגל הינו !5. נכפיל זאת במספר הסידורים האפשריים של ההוביטים, כלומר !4. לכן, ישנן $5! \cdot 4!$ אפשרויות.
ב. מספר הדרכים להושיב 9 דמויות במעגל הינו !8. מספר הדרכים לסדר 9 דמויות במעגל, כאשר הגמד והאלף **חייבים** לשבת יחד הינו $2 \cdot 7!$. לכן, בסה"כ נקבל שמספר האפשרויות הינו $8! - 2 \cdot 7!$.
ג. מספר הדרכים לסדר את חברי האחווה בשורה הינו !9.
ד. מספר הדרכים לבחור שלושה שילכו בזה אחר זה הינו $\frac{9!}{6!}$.
ה. מספר הדרכים לבחור שלושה חברים שילכו יחדיו, הינו $\binom{9}{6}$.
ו. נחלק את הפתרונות לשני חלקים: קבוצת הפתרונות בהם הגמד והאלף לא באותה הקבוצה, וקבוצת הפתרונות בהם הם כן באותה הקבוצה.
- אם הגמד והאלף אינם באותה הקבוצה, עלינו לחלק את כל החברים למעט האלף לשתי קבוצות שונות. האלף יהיה בקבוצה בה הגמד אינו חבר. ישנן 2^8 אפשרויות שונות לביצוע החלוקה הזו. נשים לב, שכיוון שהגמד והאלף אינם באותה הקבוצה, אין קבוצה ריקה.
- אם הגמד והאלף באותה הקבוצה, אזי גם הקוסם איתם. לכן, נוכל לחלק את כל החברים, למעט הקוסם והאלף, לשתי קבוצות. יש לכך 2^7 אפשרויות. נשים לב, שספרנו שני פתרונות לא חוקיים, שכן ספרנו גם את הפתרונות אשר שמים את כל החברים בקבוצה אחת, ומשאירים את הקבוצה השניה ריקה. לכן, בסהכ, ישנם $2^7 - 2$ פתרונות חוקיים.
בסהכ, נקבל שישנם $2^8 + 2^7 - 2$ אפשרויות לביצוע החלוקה לקבוצות.
ז. ישנן 5 אפשרויות שונות לבחירת גזבר שאינו הוביט. עבור כל בחירה כזו, ישנן $\binom{8}{3}$ אפשרויות לבחירת ועדה מפקחת.

ישנן 4 אפשריות לבחור הוביט לתפקיד הגזבר. עבור כל בחירה כזו, ישנן $\binom{8}{3}-1$ אפשרויות לבחירת ועדה מפקחת, שכן אין אפשרות לבחור את שלושת ההוביטים הנוספים לועדה. לכן, בסה"כ מספר האפשרויות לבחור גזבר וועדה מפקחת הינו

$5\cdot\binom{8}{3}+4\cdot\left(\binom{8}{3}-1\right)$.

6. א. סדרה שסכום איבריה הינו 0 היא סדרה המכילה מספר שווה של 1- ושל 1. נשים לב שאם n אי-זוגי, מספר הסדרות הללו הוא 0. עבור n זוגי, מספר הסדרות הללו שקול למספר האפשרויות לבחור $\frac{n}{2}$ איברים שיקבלו את הערך 1 (כאשר האיברים שנותרו יקבלו את הערך 1-). כלומר, בסה"כ מספר האפשרויות הינו $\binom{n}{\frac{n}{2}}=\frac{n!}{(n/2)!(n/2)!}$.

ב. נבחר את כל האיברים בסדרה מלבד את האחרון ללא הגבלה. האיבר האחרון יהיה 1- במידה ומכפלת האיברים הקודמים היא שלילית ו- 1 במקרה והיא חיובית. לכן, בסה"כ נקבל שמספר האפשרויות הינו 2^{n-1}.

ג. עבור n זוגי, על מנת שהתנאי יתקיים, עלינו לוודא שכל זוג (לא חופף) בסדרה הפוך בסימן. כלומר, לכל $1\leq i\leq\frac{n}{2}$ מתקיים $a_{2i-1}=-a_{2i}$. לכן, יש לנו $\frac{n}{2}$ זוגות של איברים שאנו יכולים לבחור את הסדר של הסימנים בהם (+- או -+). כלומר, מספר האפשרויות הוא $2^{\frac{n}{2}}$.

עבור n אי-זוגי, האיבר האחרון יכול להיות חיובי או שלילי, ללא הגבלה. לכן, מספר האפשרויות הינו $2\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$.