תרגול 5 – עקרון ההכלה וההדחה

הקדמה:
ראינו כי עפ"י עקרון הסכום, אם A ו B– קבוצות סופיות וזרות אז $|A \cup B| = |A| + |B|$, אבל מהי עוצמת $|A \cup B|$ כאשר הקבוצות A ו B– אינן זרות?

עבור **2** קבוצות: אם A ו B– קבוצות סופיות כלשהן, אזי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
עבור **3** קבוצות: אם A, B ו C– קבוצות סופיות, אזי
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

עקרון ההכלה וההדחה: תהיינה $A_1, A_2, .., A_n$ קבוצות סופיות. אזי

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

מסקנה: תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ קבוצות סופיות. אזי

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |S| \setminus \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| =$$

$$|S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| =$$

באופן כללי, במקרה בו לכל $1 \le k \le n$ גודל החיתוך של k קבוצות הוא s_k ונסמן $s_0 = s$ אזי:
$|S \setminus \cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=0}^{n} -1^k \binom{n}{k} s_k$

תרגילים:

תרגיל 1:
כמה מספרים בין 1 ל – 1000 מתחלקים בלפחות אחד מהמספרים 2,3,5?

פתרון:
נגדיר את הקבוצות הבאות:
A_2 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 2.
A_3 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 3.
A_5 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 5.
רוצים למצוא את גודל הקבוצה $A_2 \cup A_3 \cup A_5$.
ניתן לראות כי:

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500\ \ ,|A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333\ \ ,|A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

בנוסף:

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166\ \ ,|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66\ \ ,|A_5 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100$$

וגם:

$$|\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 \cap \mathrm{A}_5| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

לכן הפתרון הוא

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = (500 + 333 + 200) - (166 + 66 + 100) + 33 = 734.$$

תרגיל 2:
בכמה דרכים ניתן לחלק 80 כדורים זהים ל – 5 תאים כך שבאף תא לא יהיו יותר מ – 24 כדורים?

פתרון:
נסמן ב- S את קבוצת כל החלוקות של 80 כדורים זהים ל – 5 תאים, אזי $|S| = \binom{80+5-1}{5-1}$.
נסמן עבור $1 \le i \le 5$ ב A_i– את קבוצת החלוקות לתאים בהן בתא ה- i יש יותר מ – 24 כדורים,
אנחנו מעוניינים בערך

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right|$$

נבחין כי $|A_i| = \binom{55+5-1}{5-1}$.

כמו כן, לכל $1 \le i \ne j \le 5$, $|A_i \cap A_j| = \binom{30+5-1}{5-1}$,

ולכל $1 \le i, j, k \le 5$ שונים, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{5+5-1}{5-1}$.

עבור 4 קבוצות ומעלה, עוצמת חיתוכן שווה ל-0.

הערך המבוקש הוא

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right|$$
$$= |S| - \sum_{i=1}^{5}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le 5}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le 5}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \text{(סכום עוצמות חיתוכי הרביעיות)} - \text{(עוצמת חיתוך כל החמישיה)}$$

$$= \binom{80+5-1}{5-1} - 5\cdot\binom{55+5-1}{5-1} + \binom{5}{2}\binom{30+5-1}{5-1} - \binom{5}{3}\binom{5+5-1}{5-1}$$

<u>פתרון נוסף:</u>
נזכר בתרגיל 2 מתרגול 3 (כשהיינו צריכים לחלק 300 כדורים ל3 תאים עם לכל היותר 120 כדורים בכל תא). נפתור שאלה שקולה: נניח שבכל תא יש 24 כדורים. בכמה דרכים ניתן להוציא 40 כדורים מ5 התאים (כך שנשאר עם 80 כדורים סה"כ)?
שאלה חדשה זו, שקולה לשאלה:
בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים ל5 תאים עם לכל היותר 24 כדורים בכל תא?
מספר אפשרויות החלוקה ללא אילוצים הוא $\binom{40+5-1}{5-1}$. ישנם חמישה אילוצים ובכל חלוקה לכל היותר אילוץ אחד מופר, ולכן סך החלוקות שאינן חוקיות הוא $5\cdot\binom{(40-25)+5-1}{5-1}$. סך הכל קיבלנו $\binom{44}{4} - 5\cdot\binom{19}{5}$ אפשרויות.

<u>תרגיל 3:</u>
מה מספר הסידורים (ללא חזרות) של אותיות המילה *MATHEMATICS* שאינן מכילות את תתי-הסדרות *CAT* ,*MAT*, *THE*?

<u>פתרון:</u>
נגדיר:
S - קבוצת כל הסידורים האפשריים.
A_1- קבוצת הסידורים בהם הרצף *MAT* מופיע.
A_2- קבוצת הסידורים בהם הרצף *CAT* מופיע.
A_3- קבוצת הסידורים בהם הרצף *THE* מופיע.
אנו מעוניינים בערך

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{3} A_i\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right|$$

במילה *MATHEMATICS* יש 11 אותיות ומתקיים $|S| = \binom{11}{2,2,2,1,\ldots,1}$.

כמו כן, מתקיים:
$|A_1| = \binom{9}{1,1,\ldots,1} - \binom{7}{2,1,\ldots,1} = 9! - \frac{7!}{2}$ - נתייחס לרצף *MAT* כאות, נחשב את מספר הסידורים האפשריים ונחסר את כמות המילים שבהם מופיע הרצף *MAT* פעמיים, היות ואלה נספרו פעמיים.
$|A_2| = \binom{9}{2,1,\ldots,1} = \frac{9!}{2}$ - נתייחס לרצף *CAT* כאות (האות *M* מופיעה פעמיים).
$|A_3| = \binom{9}{2,2,1,\ldots,1} = \frac{9!}{4}$ - נתייחס לרצף *THE* כאות (האותיות *M* ו-*A* מופיעות פעמיים).

חיתוכים של זוגות:

.$|A_1 \cap A_2| = \binom{7}{1,1,\dots,1} = 7!$

$|A_1 \cap A_3| = \binom{7}{1,1,\dots,1} + \binom{7}{1,1,\dots,1} - \binom{5}{1,1,\dots,1} = 2\cdot 7! - 5!$ - נסכום את מספר הסידורים בהם *MAT* ו– *THE* מופעים עם מספר הסידורים בהם *MATHE* מופיע ונחסר את מספר הסידורים בהם *MATHE* ו– *MAT* מופעים.

$|A_2 \cap A_3| = \binom{7}{2,1,\dots,1} + \binom{7}{2,1,\dots,1} = \frac{7!}{2} + \frac{7!}{2} = 7!$ - נסכום מספר הסידורים בהם מופיעים *CAT* ו- *THE* עם מספר הסידורים בהם מופיע *CATHE* (*M* מופיעה פעמיים).

חיתוך של שלושת הקבוצות:

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{5}{1,1,\dots,1} + \binom{5}{1,1,\dots,1} = 2\cdot 5!$ – נסכום את מספר הסודורים בהם *CAT* ו – *MATHE* מופיעים עם מספר הסידורים בהם מופיעים *MAT* ו – *CATHE*.

בסה"כ,

$$|S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{11}{2,2,2,1,\dots,1} - \left(9! - \frac{7!}{2} + \frac{9!}{2} + \frac{9!}{4}\right) + (7! + 2\cdot 7! - 5! + 7!) - 2\cdot 5!$$

<u>תרגיל 4</u>:

נתונים n כדורים זהים ו – n כדורים צבעוניים בצבעים שונים אחד מהשני.

בכמה דרכים ניתן לחלק את כל הכדורים הנ"ל ל - $2n$ תאים מובחנים, כאשר בכל אחד מ – n התאים הראשונים יהיה לפחות כדור אחד.

<u>פתרון</u>:

נגדיר,

S - קבוצת כל החלוקות האפשריות,

ועבור $1 \le i \le n$, A_i - קבוצת החלוקות בהן התא ה – i ריק.

אזי, הפתרון הוא

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

מתקיים כי $|S| = \binom{2n+n-1}{n}(2n)^n$,

לכל $1 \le i \le n$, $|A_i| = \binom{2n-1+n-1}{n}(2n-1)^n$.

לכל $i \ne j$ כך ש - $1 \le i,j \le n$, $|A_i \cap A_j| = \binom{2n-2+n-1}{n}(2n-2)^n$,

ובאופן כללי, עוצמת חיתוכן של $1 \le k \le n$ קבוצות נתונות היא $\binom{2n-k+n-1}{n}(2n-k)^n$

וסכום עוצמות החיתוכים בגודל k הוא $\binom{n}{k}\binom{2n-k+n-1}{n}(2n-k)^n$.

לכן בסה"כ, גודלו של הפתרון הוא

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n-k+n-1}{n}(2n-k)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{3n-1-k}{n}(2n-k)^n$$

<u>תרגיל 5</u>:

בכמה דרכים ניתן להושיב n זוגות נשואים על ספסל כך שאף אישה **לא** תשב לצד בעלה?

<u>פתרון</u>:

נגדיר S - קבוצת ההושבות האפשריות של $2n$ אנשים על ספסל. אזי, מתקיים כי $|S| = (2n)!$.

ועבור $1 \le i \le n$, A_i - קבוצת ההושבות בהן הזוג ה-i יושב זה לצד זה.

לכל $1 \le i \le n$, נתייחס לזוג ה-i כבלוק ונכפול במספר הסידורים הפנימיים בין בני הזוג ונקבל $|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$.

כעת, נחשב לכל $0 \le k \le n$, את מספר הדרכים להושבת n הזוגות, כך ש k זוגות מסוימים ישבו זה לצד זה.

נתייחס לכל זוג היושב זה לצד זה כבלוק כשיש עבורו 2 סידורים פנימיים, ונקבל שמספר האפשרויות לסידור על ספסל הוא $(2n-k)! \cdot 2^k$, לכן סכום עוצמות החיתוכים בגודל k הוא $\binom{n}{k}(2n-k)! \cdot 2^k$,

ומספר הסידורים המבוקש הוא

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(2n-k)! \cdot 2^k$.

<u>תרגיל 6:</u>

נתונה קבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. כמה סדרות שונות באורך $2n$ ניתן ליצור מאברי הקבוצה, כך שכל איבר יופיע פעמיים ולא יהיו שני איברים זהים סמוכים?

<u>פתרון:</u>

נגדיר S - קבוצת הסדרות השונות באורך $2n$ בהן כל איבר מופיע פעמיים. אזי, $|S| = \frac{(2n)!}{2^n}$.

עבור $1 \le i \le n$, נגדיר A_i - קבוצת הסדרות שמופיע בהן הרצף $a_i a_i$.

לכל $1 \le i \le n$, נתייחס לרצף $a_i a_i$ כבלוק ונקבל $|A_i| = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$.

עוצמת חיתוך של כל $1 \le k \le n$ קבוצות נתונות שווה ל – $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$, וזאת כי ישנם k רצפים $a_i a_i$ אליהם נתייחס כבלוק.

כלומר, הסדרה מכילה $2n-k$ איברים, מתוכם $n-k$ זהים.

סה"כ סכום כל החיתוכים בגודל k, הוא $\binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

מכאן שהפתרון הוא $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

<u>הערה:</u> שים לב התוצאה היא כמספר האפשרויות לסדר n זוגות כך שאף אישה לא תשב ליד בעלה חלקי 2^n.

<u>תרגיל 7:</u>

מה מספר הפתרונות במספרים טבעיים למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$ כאשר לכל i, $i \le x_i \le 3i$?

<u>פתרון:</u>

שאלה שקולה: בכמה אופנים ניתן לחלק 30 כדורים זהים ל – 5 תאים שונים כך שבתא ה – i יהיו בין i ל - $3i$ כדורים.

ראשית, נשים לב כי לכל i , בתא ה-i יש i כדורים לפחות, לכן נשים בתא 1 כדור אחד, בתא 2 שני כדורים, וכו'.

כעת, נותרו לנו 15 כדורים שעלינו להכניס ל – 5 תאים כאשר בתא ה – i מותר לשים בין 0 ל - $2i$ כדורים.

נגדיר S – קבוצת כל החלוקות האפשריות של 15 כדורים ל-5 תאים. $|S| = \binom{15+5-1}{5-1}$.

ועבור $1 \le i \le 5$, A_i - קבוצת הסידורים בהם יש חריגה בתא ה – i.

אם חרגנו בתא ה – i אזי שמנו שם לפחות $2i + 1$ כדורים, ז"א נותרו לנו עוד $15 - (2i+1) = 14 - 2i$ כדורים לחלק בין התאים. כלומר, $\binom{14-2i+5-1}{5-1} = \binom{18-2i}{4}$ אפשרויות סידור.

לכן, $\sum_{i=1}^{5}|A_i| = \binom{16}{4} + \binom{14}{4} + \binom{12}{4} + \binom{10}{4} + \binom{8}{4}$.

כמו כן, אם חרגנו בתא ה – i וגם בתא ה-j אז נותרו לנו עוד $15 - (2i+1) - (2j+1) = 13 - 2i - 2j$ כדורים לחלק בין התאים. כלומר, $\binom{13-2i-2j+4}{4} = \binom{17-2(i+j)}{4}$ אפשרויות סידור.

לכן,

$|A_5 \cap A_1| + |A_4 \cap A_2| + |A_4 \cap A_1| + |A_3 \cap A_2| + |A_3 \cap A_1| + |A_2 \cap A_1| =$

$\binom{5}{4} + \binom{5}{4} + \binom{7}{4} + \binom{7}{4} + \binom{9}{4} + \binom{11}{4}$

בשביל לחרוג ב – 3 תאים, לא ייתכן כי אחד מהם יהיה 4 או 5, לכן המקרה היחיד הרלוונטי הוא $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.

בסה"כ הפתרון הוא $\binom{19}{4}$ – (סכום עוצמות היחידונים) + (סכום עוצמות חיתוכי הזוגות) – (סכום עוצמות חיתוכי שלושות).

<u>תרגיל 8:</u>

מטילים שתי קוביות שונות n פעמים (עם חשיבות לסדר). מה מספר הסדרות שבהן מופיעה כל אחת מבין האפשרויות $(1,1), (2,2), \dots, (6,6)$?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב- S את קבוצת כל סדרות ההטלות האפשריות. אזי, $|S| = 36^n$.

עבור $1 \le i \le n$, נסמן ב – A_i את קבוצת הסדרות בהן (i,i) לא מופיע.

לכל $1 \le i \le 6$, $|A_i| = 35^n$.

לכל $1 \le i \ne j \le 6$, $|A_i \cap A_j| = 34^n$.

לכל $1 \le k \le 6$ קבוצות, עוצמת חיתוכן שווה ל – $(36-k)^n$.

לכן מספר הסדרות שבהן מופיעה כל אחת מהאפשרויות $(1,1), (2,2), \dots, (6,6)$ הוא $\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} \cdot (36-k)^n$.

<u>תרגיל 9:</u>

לכמה פונקציות חח"ע $f: \{1,2,\dots,30\} \to \{1,2,\dots,100\}$ אין נקודת שבת?

<u>פתרון:</u>

נגדיר S - קבוצת הפונקציות החח"ע . אזי, $|S| = \frac{100!}{70!}$.

נגדיר עבור $1 \le i \le 30$, A_i - קבוצת הפונקציות המקיימות ש – $f(i) = i$.

מתקיים כי $|A_i| = \frac{99!}{70!}$, חיתוך כל k קבוצות נתונות שווה ל – $\frac{(100-k)!}{70!}$.

לכן הפתרון הוא $\sum_{k=0}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} \frac{(100-k)!}{70!}$.

אי – סדרים (תמורות ללא נקודות שבת) :

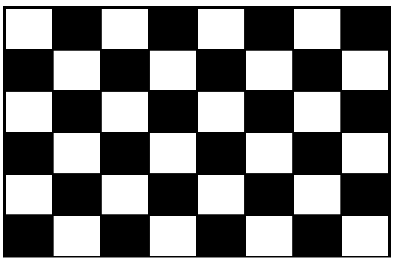
מספר התמורות של $\{1,2,\dots,n\}$ ללא נקודת שבת הוא $\frac{n!}{e} \approx n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$.

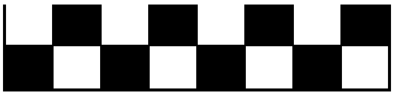
<u>תרגיל 10:</u>

א. בכמה דרכים ניתן להציב על לוח שחמט 8 צריחים כך שלא יאיימו זה על זה? (צריחים מאיימים זה על זה אם הם נמצאים באותה השורה/ עמודה)

ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שאף צריח לא יוצב על האלכסון הלבן?

ג. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת אם על כל הצריחים להיות על משבצות לבנות אך לא על האלכסון? (התא השמאלי העליון הוא לבן)





<u>פתרון:</u>
א. בכל שורה נמצא צריח יחיד. כמו כן בכל עמודה נמצא צריח יחיד. אם נמספר את הצריחים מ-1 עד 8 לפי השורה שלהם, אז כל שנותר הוא לבחור לכל צריח עמודה . לכן בסה"כ יש !8 סידורים כנ"ל.
ב. סידורים אלה מתאימים לתמורות אי-סדר מלא של $\{1,2,\ldots,8\}$ וכאלה יש $\left[\frac{8!}{e}\right]$.
ג. כל תמורה המתקבלת כאן מורכבת מאי-סדר מלא של $\{1,3,5,7\}$ ו – $\{2,4,6,8\}$ ועל כן מספרן $\left[\frac{4!}{e}\right]\cdot\left[\frac{4!}{e}\right]$. (שקול לסדר פעמיים קבוצה של 4 צריחים על לוח 4 על 4 ללא הצבה על האלכסון, עבור שורות ועמודות זוגיים ועבור שורות ועמודות אי-זוגיים)

פונקצית אוילר:
פונקצית אוילר היא הפונקציה $\phi:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}$ המוגדרת כך: $\phi(1)=1$ ולכל $n>1$, $\phi(n)$ הוא מספר המספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ שזרים ל – n.
משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, ותהיה $p_1,p_2,\ldots,p_k$ רשימת כל הראשוניים השונים המחלקים את n.
אז $\phi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

<u>תרגיל 11:</u>
מהו מספר המספרים שזרים ל – 21 וקטנים ממנו?

<u>פתרון:</u>
הראשוניים שמחלקים את 21 הם 3,7 לכן $\phi(n)=21\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)=21\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=12$, ואכן המספרים שזרים ל- 21 מתוך $\{1,2,\ldots,21\}$ הם $\{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$.

<u>תרגיל 12:</u>
הוכיחו כי $\phi(n)$ זוגי לכל $n>2$.

<u>פתרון:</u>
ניתן להציג את n בתור מכפלה של ראשוניים: $n=\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i}$. אזי מתקיים:
$\phi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i-1}{p_i}=\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i-1}\cdot\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)$. כל הגורמים במכפלה הם מס' שלמים. $n>2$ לכן יש 2 אפשרויות:
א. הריבוי של 2 גדול מ-1: ואז במכפלה $\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i-1}$ מופיע 2 ולכן $\phi(n)$ זוגי.
ב. קיים $p_i>2$ ואז $\left(p_i-1\right)$ זוגי ולכן $\phi(n)$ זוגי.