מבנים בדידים וקומבינטוריקה תרגיל 3

1) כמה מספרים טבעיים בין 1 ל500 אינם מתחלקים ב-7, אך מתחלקים ב3 או ב5?

פתרון:

נסמן $\mathrm{A} = \{1, \dots, 500\}$, ונגדיר את הקבוצות הבאות:

- A_3- קבוצת המספרים המתחלקים ב3.
- A_5- קבוצת המספרים המתחלקים ב5.
- A_7- קבוצת המספרים המתחלקים ב7.

קבוצת המספרים שמתחלקים ב3 וב7 היא $A_3 \cap A_7$.

קבוצת המספרים שמתחלקים ב5 וב7 היא $A_5 \cap A_7$.

הפתרון הוא גודל קבוצת המספרים ש אינם מתחלקים ב-7, אך מתחלקים ב3 או ב5, כלומר נחשב-

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| - |A_7|$$

נשים לב כי $100 = \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = |A_5|$, $166 = \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor = |A_3|$, $71 = \left\lfloor \frac{500}{7} \right\rfloor = A_7$

בנוסף, $33 = \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor = |A_3 \cap A_5|$, $14 = \left\lfloor \frac{500}{35} \right\rfloor = |A_5 \cap A_7|$, $23 = \left\lfloor \frac{500}{21} \right\rfloor = |A_3 \cap A_7|$,

$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{500}{105} \right\rfloor = 4$$

מעקרון ההכלה וההדחה נקבל ש-

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 100 + 166 + 71 - (33 + 23 + 14) + 4 = 271$$

וסה"כ נקבל- $200 = 271 - 71 = |A_3 \cup A_5 \cup A_7| - |A_7|$

2)תהי $\mathrm{M} = \{1,2, \dots, m\}$.
כמה אפשרויות יש לבנות 4 תתי קבוצות של M, שנסמנן A, B, C, D (שימו לב שהקבוצות מובחנות) כך שיתקיים:

א. $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C} \cup \mathrm{D} \subseteq \mathrm{M}$

ב. $A \cup B \cup C \cup D = M$

ג. כמו סעיף ב, וגם ארבע תתי הקבוצות זרות זו לזו

ד. כמו סעיף ג וגם $\mathrm{A} \neq \emptyset, \mathrm{B} \neq \emptyset, \mathrm{C} \neq \emptyset, \mathrm{D} \neq \emptyset$

פתרון:

א. לכל אחת מהקבוצות יש 2^m אפשרויות. לכן מעקרון הכפל נקבל 2^{4m}.

ב. כל אחד מ-m האיברים חייב להופיע לפחות באחת מהקבוצות. מכאן, כל איבר יכול להיות באחת מהקבוצות, שתיים מהן, שלוש או ארבעתן. כלומר,

$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$. אנו יודעים כי מתקיים $\sum_{i=o}^{4}\binom{4}{i}=2^4$, ולכן $2^4-1=2^4-\binom{4}{0}=\sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}$, ומעקרון הכפל נקבל $(2^4-1)^m$ אפשרויות.

ג. כעת, כל איבר חייב להופיע בדיוק באחת מתוך ארבע קבוצות, לכם לכל איבר יש 4 אופציות. מעקרון הכפל נקבל 4^m אפשרויות.

ד. נסמן ב X_1,X_2,X_3,X_4 את קבוצת האפשרויות לתתי קבוצות כאשר $\mathrm{A,B,C,D}$ ריקות (בהתאמה). ניזכר כי בסעיף ג קיבלנו 4^m אפשרויות, ולכן הפתרון הוא $4^m-|X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4|$. נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה.
כאשר בדיוק קבוצה אחת היא ריקה, אנו מפזרים m איברים בין 3 קבוצות זרות. מספר האפשרויות לכך הוא 3^m, לכן לכל $i\in\{1,2,3,4\}$ נקבל $|X_i|=3^m$. כאשר בדיוק שתי הקבוצות ריקות, מספר האפשרויות הוא 2^m. כלומר לכל $i,j\in\{1,2,3,4\}$ שונים נקבל $|X_i\cap X_j|=2^m$, ויש $\binom{4}{2}$ מקרים כאלה. לכן נקבל $\binom{4}{2}2^m$ אפשרויות בהן בדיוק שתי קבוצות ריקות. כאשר בדיוק שלוש קבוצות ריקות, מספר האפשרויות 1^m. כלומר לכל $i,j,k\in\{1,2,3,4\}$ שונים נקבל $|X_i\cap X_j\cap X_k|=1^m$, ויש $\binom{4}{3}$ כאלו. לכן נקבל $\binom{4}{3}1^m$ אפשרויות בהן בדיוק שלוש הקבוצות ריקות. המקרה שארבעת הקבוצות ריקות לא ייתכן.
נקבל סה"כ $4^m-\left(4\cdot 3^m-\binom{4}{2}2^m+\binom{4}{3}1^m\right)=4^m-4\cdot 3^m+\binom{4}{2}2^m-\binom{4}{3}$

3) **__תזכורת__**: יחס $R\subseteq A\times B$ ייקרא יחס **מלא** אם: $\forall a\in A\ \exists b\in B:(a,b)\in R$.
תהי $[n]$ הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$. כמה יחסים מלאים יש על $[n]$?

פתרון:

__פתרון ראשון:__

לכל איבר $x\in[n]$ נבחר את האיברים שעומדים איתו ביחס. יש 2^n-1 אפשרויות. ומעקרון הכפל נקבל כי $(2^n-1)^n$ אפשרויות.

__פתרון שני:__(באמצעות עקרון ההכלה וההדחה)

יחס R על $[n]$ הוא $R\subseteq[n]\times[n]$, ולכן הקבוצה $S=P([n]\times[n])$ היא קבוצת כל היחסים על $[n]$. נסמן את A_i להיות קבוצת היחסים $A_i=\{R\in S|\forall x\in[n]:(i,x)\notin R\}$.
נבחין כי R אינו יחס מלא אם קיים $i\in[n]$ עבורו $R\in A_i$. ולכן נרצה למצוא את $|\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}|$. נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה.
עבור $I\subseteq[n]$ נשים לב כי- $\bigcap_{i\in I}A_i=\{R\in S|\forall i\in I\forall x\in[n]:(i,x)\notin R\}$, כלומר כל היחסים שבהם $(i,x)\notin R$ לכל $i\in I$ ו $x\in[n]$. כמה יחסים כאלה ישנם? יחסים כאלה הם תתי קבוצות של הקבוצה- $T_I=\{(x,y)|x\notin I,y\in[n]\}$. קל לראות כי $|T_I|=n(n-|I|)$ ולכן מספר תתי הקבוצות של T_I הוא בדיוק $2^{n(n-|I|)}$. כעת נשתמש בהכלה והדחה-

$$\left|\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}\right|=\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|=\sum_{k=o}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{n(n-k)}$$

4) בתור לרבנות עומדים n זוגות, מתוכם k רוצים להתגרש ו $(n-k)$ רוצים להתחתן. מהו מספר האפשרויות לסדרם בשני תורים (תור גברים ותור נשים), כך ששני בני זוג הרוצים להתגרש לא יעמדו זה לצד זה?

פתרון:

נסמן בS את קבוצת כל הסידורים האפשריים. נסדר תחילה את הגברים ולאחר מכן את הנשים. אזי נקבל כי: $|S| = (n!)^2$.

כעת, נגדיר A_i לכל $1 \leq i \leq k$ להיות קבוצת אוסף הסידורים האפשריים בהם הזוג ה-i-י שרוצה להתגרש עומד זה לצד זה. נשים לב כי פתרון השאלה הוא $\left|\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}\right|$.

מספר הסידורים שלפחות זוג אחד מהזוגות הרוצים להתגרש עומדים זה לצד זה הוא $|A_1 \cup \ldots \cup A_k|$. נבחין כי כדי לחשב את $|A_i|$ נסדר את הגברים בתור ואז עבור הגבר הi-י שרוצה להתגרש תעמוד בת זוגו ואת שאר הנשים נסדר ללא הגבלה. סה"כ נקבל:

$|A_i| = n!\,(n-1)!$. באופן דומה, לכל $1 \leq i < j \leq k$,

$\left|A_i \cap A_j\right| = n!\,(n-2)!$. באופן כללי, סידור של m מתגרשים ביחד:

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}\right| = n!\,(n-m)!$$

כעת מעקרון הסכום וההכלה וההדחה נקבל:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{k} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left|A_i \cap A_j\right| - \sum_{1 \leq i < j < l \leq k} \left|A_i \cap A_j \cap A_l\right| + \cdots + (-1)^k \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|$$

כלומר:

$$(n!)^2 - kn!\,(n-1)! + \binom{k}{2} n!\,(n-2)! - \binom{k}{3} n!\,(n-3)! + \cdots + (-1)^k n!\,(n-k)! = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} n!\,(n-i)!$$

5)הערה: בשאלה זו אין צורך לפתור את הנוסחאות

א. הציגו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים להושיב מחדש n אנשים היושבים בשורה, כך שאף אדם לא יתרחק יותר מכיסא אחד ממקומו המקורי (כלומר, כל אדם יישאר במקומו או יזוז כיסא אחד ימינה או שמאלה).

ב. בקרקס משחק לוליין שקופץ על מערכת צירים חד־מימדית שמתחילה ב־ 0. הלוליין קופץ ימינה 3 או 4 יחידות וקופץ שמאלה יחידה אחת או שתיים. קפיצה שמאלה יכולה להתבצע <u>רק אחרי</u> קפיצה ימינה. מבצעים רישום של הנקודות שבהן נחת הלוליין. למשל, אם קפץ 4 ימינה, אחת שמאלה ואז שוב 4 ימינה, רושמים 7, 3, 4, 0 .עבור $n \in \mathbb{N}$ נסמן ב־ a_n את מספר הרישומים האפשריים עבורם הלוליין מסיים בנקודה n. מצאו נוסחת נסיגה עבור a_n עם תנאי התחלה מספיקים.

פתרון:

א. נסמן בa_n את מספר הדרכים להושיב מחדש n אנשים היושבים בשורה. האדם בקצה השמאלי יכול להישאר במקומו, ואז יש a_{n-1} אפשרויות לשאר האנשים, או שהוא יכול

להתחלף עם אדם מימינו, ואז יש a_{n-2} דרכים להסתדר. לכן $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ותנאי ההתחלה הם- $a_0 = 1, a_1 = 1$.

ב. נסמן ב־ a_n את מספר הרישומים השונים, כפי שמצויין בשאלה. נחלק למקרים לפי הנקודה בה נמצא הלוליין לפני הצעד האחרון במסלול. נסמן נקודה זו בm. נפריד למקרים:

- $m = n - 4$. יש a_{n-4} אפשרויות לצעוד לנקודה זו והצעד האחרון חייב להיות 4 יחידות ימינה.
- $m = n - 3$. יש a_{n-3} אפשרויות לצעוד לנקודה זו והצעד האחרון חייב להיות 3 יחידות ימינה.
- $m = n + 1$. במקרה זה הצעד האחרון הוא יחידה אחת שמאלה ומכאן שהצעד הלפני אחרון חייב להיות 3 יחידות ימינה או 4 יחידות ימינה. יש $a_{n-2} + a_{n-3}$ אפשרויות לכך.
- $m = n + 2$. במקרה זה הצעד האחרון הוא שתי יחידות שמאלה ומכאן שהצעד הלפני אחרון חייב להיות 3 יחידות ימינה או 4 יחידות ימינה. יש $a_{n-1} + a_{n-2}$ אפשרויות לכך.

חילקנו למקרים **זרים** ולכן נסכום את מספר האפשרויות של המקרים השונים ונקבל כי:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-4}$$

עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7$

6)א. יהא $n \in \mathbb{N}$. חשבו את עוצמת הקבוצה:

$$\{f: \{1, \dots, n\} \to \{0,1,2\} | \forall i \in \{1, \dots, n-1\}: f(i) + f(i+1) \neq 4\}$$

הערה: בסעיף זה יש לתת ביטוי סגור.

ב. נסמן בa_n את מספר הסדרות באורך n הבנויות מהתווים 0 ו1 ולא מכילות את הרצף 001. מצאו נוסחת נסיגה עבור a_n.

פתרון:

א) נשים לב כי הבעיה שקולה למציאת עוצמת קבוצת הסדרות באורך n מעל הא"ב {0,1,2}, ללא שתי אותיות סמוכות ששתיהן 2. נבנה נוסחת נסיגה שתייצג את עוצמת קבוצה זו. נתבונן באות הראשונה של הסדרה- אם היא 0 או 1 אז אין מגבלה על המשך הסדרה(באורך $n-1$). אם האות הראשונה היא 2 אזי האות הבאה חייבת להיות 0 או 1. נקבל כי:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

לכל $n \geq 2$ כאשר תנאי ההתחלה הם: $a_0 = 1, a_1 = 3$.

נפתור בעזרת שיטת הפולינום האופייני. הפולינום הוא:

$$x^2 - 2x - 2$$

נחשב את שורשי הפולינום ונקבל שהם $1 + \sqrt{3}$ ו $1 - \sqrt{3}$. לכן הפתרון שאנו מחפשים הוא מהצורה:

$$A\left(1 + \sqrt{3}\right)^n + B\left(1 - \sqrt{3}\right)^n$$

נציב את תנאי ההתחלה, נחשב ונקבל כי:

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

ב)דבר ראשון נחשב כמה מקרי בסיס: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7$. עבור נוסחת הנסיגה, נראה שני פתרונות שונים:

<u>פתרון ראשון:</u>

תהי $x_1, x_2, \dots, x_n$ סדרה חוקית כלשהי באורך n, נספור בכמה דרכים ניתן להרכיב אותה, ע"י חלוקה למקרים:

- $x_1 = 1$: במקרה זה, ניתן לבחור את התווית $x_2, \dots, x_n$ להיות כל סדרה חוקית באורך $n-1$, כלומר יש a_{n-1} אפשרויות.
- $x_1 = 0$, $x_2 = 1$: במקרה זה, ניתן לבחור את התווית $x_3, \dots, x_n$ להיות כל סדרה חוקית באורך $n-2$, כלומר יש a_{n-2} אפשרויות.
- $x_1 = 0, x_2 = 0$: במקרה זה, אנו מוכרחים לבחור את כל התווים $x_3, \dots, x_n$ להיות 0 אחרת הסדרה איננה חוקית(תכיל 001). כלומר ישנה אפשרות 1 בדיוק.

סה"כ שלושת המקרים הללו זרים, ומכסים את כל הסדרות האפשריות ולכן נסיק כי הפתרון הינו: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$

<u>פתרון שני:</u>

כל סדרה חוקית $x_1, \dots, x_n$ באורך n מתקבלת ע"י סדרה חוקית $x_1, \dots, x_{n-1}$ באורך $n-1$ ששורשר אליה התו x_n היכול להיות 0 או 1. יש $2a_{n-1}$ סדרות שונות שניתן ליצור באופן זה. אך בדרך זו אנו עלולים ליצור גם סדרות אשר אינן חוקיות. הדרך היחידה שבה עלולה להיווצר בדרך זו סדרה לא חוקית היא אם $x_{n-1} = x_{n-2} = 0$ והוספנו את התו החדש

$x_n = 1$.

כמה סדרות לא חוקיות יצרנו? מספר הסדרות החוקיות באורך $n-1$ שנגמרות ב00. אולם, זה בדיוק מספר הסדרות החוקיות באורך $n-3$ כלומר a_{n-3}. סה"כ אם ניקח את הסדרות שלקחנו(הכוללות את כל הסדרות החוקיות ובנוסף חלק מהסדרות שאינן חוקיות) ונוריד מהן את הסדרות שאינן חוקיות נקבל בדיוק את מספר הסדרות החוקיות כלומר:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-3}$$

7) נסחו נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה עבור מספר הסדרות באורך n הבנויות מהתווים 0 ו1 המכילות לפחות זוג אחד של אפסים סמוכים.

פתרון:

נגדיר a_n- מספר הסדרות מאורך n המכילות לפחות זוג אחד של אפסים סמוכים. נבחן את האפשרויות השונות עבור הרישא של סדרה חוקית:
<u>עבור הרישא 1-</u> יש להשלים לסדרה ע"י שרשור של של סדרה שאורכה $n-1$ עם לפחות זוג אחד של אפסים סמוכים, ויש לכך a_{n-1} סדרות אפשריות.
<u>עבור הרישא 01-</u> יש להשלים לסדרה ע"י שרשור של סדרה באורך $n-2$ עם לפחות זוג אחד של אפסים סמוכים, ויש לכך a_{n-2} סדרות אפשרויות.
<u>עבור הרישא 00-</u> כבר יש לנו זוג אחד של אפסים סמוכים, לכן כל סדרה באורך $n-2$ שנשרשר תהיה סדרה חוקית, ויש לכך 2^{n-2} סדרות אפשריות.

בסה"כ קיבלנו: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$
תנאי ההתחלה: $a_1 = 0, a_0 = 0$