תרגול 12

מסלולי ומעגלי המילטון-

הגדרות:

מסלול המילטון:
מסלול בגרף שעובר בכל קדקוד בדיוק פעם אחת.

מעגל המילטון:
מעגל בגרף שעובר בכל קדקוד בדיוק פעם אחת, למעט הקדקוד שממנו התחיל ובו מסיים.

משפט אורה (Ore):
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון פשוט, על $n \geq 3$ קדקודים, אם לכל שני קדקודים לא סמוכים, $u, v \in V$ מתקיים $deg(u) + deg(v) \geq n$ אז יש ב G מעגל המילטון.

גרף תחרות: גרף מכוון שבו לכל שני קדקודים x, y קיימת הצלע (x, y) או (y, x) אך לא שתיהן.

שאלה 1:
לאלו ערכי p,q יש בגרף הדו חלקי השלם - $K_{p,q}$:
א. מעגל המילטון.
ב. מסלול המילטון.

פתרון:
א. נסמן ב A, B את קבוצות הקדקודים של שני חלקי הגרף כך ש $|A| = p, |B| = q$.
נבחין תחילה כי $p = q > 1$.
הסבר: אם $p \neq q$, בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח ש $p > q$, אזי אחרי כל קדקוד מ- A הנמצא במסלול כלשהו יהיה קדקוד מ- B בגלל הדו חלקיות, לכן לאחר שנגיע לקדקוד ה- $q + 1$ מקדקודי A במסלול המועמד להיות חלק ממעגל המילטון, כבר עברנו על כל קדקודי B . כלומר, לא נוכל לחזור לקדקוד שהמסלול החל ממנו מבלי לעבור על קדקוד מ- B שכבר עברנו ומכאן שלא נוכל לקבל מעגל המילטון.
אם $p = q$, ניתן להתחיל מקדקוד מ- A ובכל שלב להגיע לקדקוד כלשהו שלא עברנו בו עד שלא יוותרו כאלה ואז לחזור לקדקוד שהמסלול החל ממנו ולקבל מעגל המילטון.

ב. $|p - q| \leq 1$.
הסבר: אם $|p - q| > 1$ משיקולים דומים לסעיף א', אין בגרף מסלול המילטון. אחרת, נניח $|p - q| \leq 1$ אזי מתקיים שההפרש בין מספר אברי A למספר אברי B קטן או שווה ל- 1. נניח בה"כ ש- $|A| \geq |B|$, נוכל להתחיל מסלול מקדקוד כלשהו של A ובכל שלב להגיע לקדקוד כלשהו שלא עברנו בו עד שלא יוותרו כאלה.
אם $|A| > |B|$ המסלול יסתיים בקדקוד מ- A ואם $|A| = |B|$ בקדקוד מ- B.

שאלה 2:
הוכיחו כי אם בגרף על $n \geq 2$ קדקודים, $G = (V, E)$, סכום הדרגות של כל שני קדקודים הוא לפחות n-1 אזי בגרף מסלול המילטון.

פתרון:
נוסיף לגרף G קדקוד חדש u, ונחבר אותו בצלע לכל הקדקודים הקיימים, יתקבל הגרף- $G' = (V \cup \{u\}, E')$ כך ש- $E' = E \cup \{\{u, v\}: v \in V\}$.

נשים לב שב-G' ישנם $n+1$ קדקודים וכל שני קדקודים לא סמוכים x, v מקיימים-
$$deg_{G'}(x) + deg_{G'}(v) = deg_G(x) + 1 + deg_G(v) + 1 \geq n - 1 + 2 = n + 1$$
ולכן לפי המשפט קיים ב- G' מעגל המילטון.
אם נזרוק את u והצלעות המחוברות אליו נקבל כי ניתקנו את המעגל ההמילטון במקום אחד ,כלומר, בגרף שיתקבל (שהינו G) קיים מסלול המילטון, מש"ל.

<u>שאלה 3:</u>
הוכיחו שבגרף שבו לפחות 2 קדקודים ושהוא תחרות קיים מסלול המילטון.

<u>פתרון:</u>

יהי k האורך המקסימלי של מסלול פשוט ב- G; המטרה היא להוכיח ש- $k = n - 1$. נניח בשלילה ש- $k < n - 1$ ויהי

$$\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$$

מסלול פשוט מאורך k. יהי u קודקוד שאינו שייך למסלול הפשוט הזה. G תחרות, לכן יש צלע בין u ל- v_k, והכיוון חייב להיות מ- u ל- v_k, אחרת

$$\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, u \rangle$$

מסלול פשוט ארוך יותר מהמקסימלי.

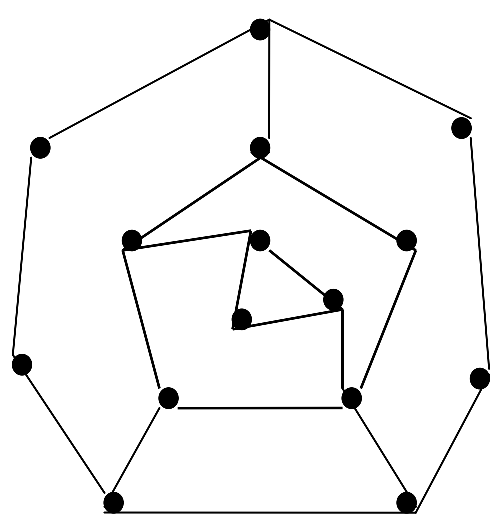
לכן קיים אינדקס i שהוא האינדקס הקטן ביותר כך שכיוון הצלע בין u ל- v_i הוא מ- u ל- v_i. חייב להיות ש- $i > 0$, כי אם יש צלע מ- u ל- v_0 אז

$$\langle u, v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$$

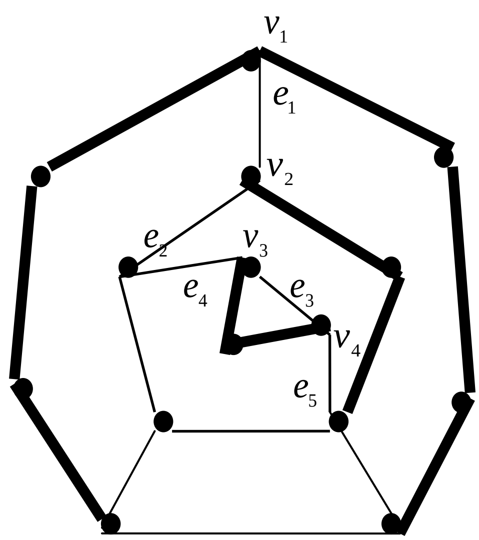
הוא מסלול פשוט ארוך יותר מהמקסימלי.
אז $\langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, u, v_i, \dots, v_k \rangle$

הוא מסלול פשוט ארוך יותר מהמקסימלי, והגענו לסתירה.

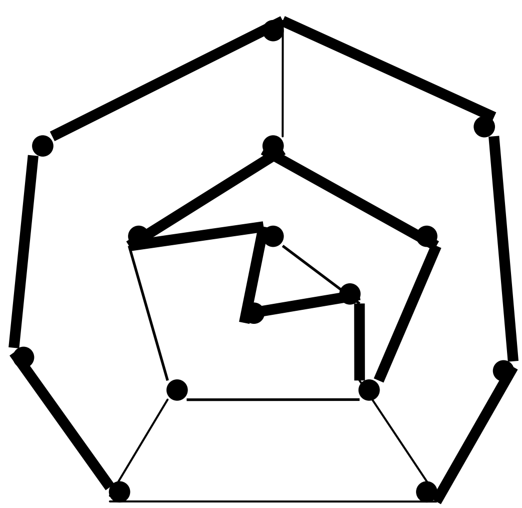
<u>שאלה 4:</u> יהי G הגרף הבא. הראה שאין ב- G מעגל המילטון:



<u>פתרון</u>: קל לראות שאם v קודקוד כלשהו מדרגה 2, אז שתי הצלעות שחלות בו חייבות להופיע בכל מעגל המילטון בגרף. לכן הצלעות העבות בדיאגרמה הבאה חייבות להיות בכל מעגל המילטון:



אז v_1 כבר מחובר לשתי צלעות שחייבות להיות במעגל המילטון, לכן e_1 אינה יכולה להיות במעגל. אבל אז e_2 חייבת להיות במעגל בגלל v_2. ברור ש- e_3 אינה יכולה להיות במעגל, לכן e_4 כן שייכת (בגלל v_3) ו- e_5 שייכת (בגלל v_4). אז הצלעות שחייבות להיות במעגל המילטון הן:



עכשיו אין דרך להרחיב את המעגל באורך 7 באמצע למעגל המילטון. לכן לא קיים מעגל המילטון ב- G.

<u>מספרי רמזי:</u>

הגדרה:

$R = R(s,t)$ הוא המספר הטבעי הקטן ביותר כך שבכל צביעה בשני צבעים (אדום וכחול) של הצלעות של K_R, קיים תת-גרף שלם K_s שצבוע בכחול או שקיים תת-גרף שלם K_t שצבוע באדום.

משפט (ארדש, סקרש): $R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$.

<u>שאלה 5</u>:

יהי G גרף לא-מכוון ללא משולשים על n קדקודים, כאשר $n \ge 55$. הראה שקיים מספר שלם חיובי k כך שיש k- צביעה של G עם התכונה שקיימים 10 קדקודים של G שמקבלים אותו הצבע.

<u>פתרון</u>: הפתרון מבוסס על משפט ארדש-סקרש. מהמשפט נובע ש-

$$R(3,\ 10) \le \binom{3+10-2}{3-1} = \binom{11}{2} = 55.$$

נתון ש- $n \ge 55$, לכן אם נצבע את <u>הצלעות</u> של K_n בכחול ואדום אז חייב להיות משולש כחול או K_{10} אדום. בפרט, אם נצבע את הצלעות של G בכחול ואת הצלעות של $\bar{G}$ באדום, ההנחה שאין משולשים ב- G גוררת שיש תת-גרף של $\bar{G}$ איזומורפי ל- K_{10}. הקדקודים של תת-הגרף הזה מהווים קבוצה בלתי-תלויה בגרף G, כלומר אין שניים מהם שמחוברים ע"י צלע. לכן אפשר לצבוע אותם באותו צבע; לא משנה איך נבחר בצבעים של שאר הקדקודים, בתנאי שלא יהיו שני שכנים מאותו צבע.

<u>שאלה 6</u>:

הוכיחו כי $R(4,3) = 9$.

<u>פתרון</u>:

נראה את שני הדברים הר"מ:

- בכל צביעה של קשתות K_9 בשני צבעים כחול ואדום, יש או K_4 צבוע כחול או K_3 צבוע אדום.
- קיימת צביעה של K_8 כך שאין לא K_4 כחול ולא K_3 אדום.

נתחיל מהוכחת החלק הראשון:

נשים לב כי בכל צביעה של K_9 בשני צבעים, לא ייתכן כי לכל קודקוד יהיו בדיוק 5 צלעות שכנות כחולות וזאת כי כאשר נתבונן בגרף שמושרה רק ע"י הצלעות הכחולות, אזי נקבל גרף עם 9 קדקודים שבו דרגת כל קדקוד היא 5 ולכן סכום דרגות הקדקודים יהיה $5 \cdot 9 = 45$ מה שלא ייתכן (לא ייתכן כי סכום דרגות הקודקודים הוא מספר אי-זוגי). לכן בהכרח קיים קודקוד v שיש לפחות 6 צלעות כחולות ששכנות לו או לפחות 4 צלעות אדומות.

אם ל v– יש 6 צלעות כחולות ששכנות לו, אזי אם נתבונן בקצוות שלהם (שהם לא v), עפ"י מה שראינו בכיתה $R(3,3) = 6$ ולכן או שקיים K_3 אדום בתוך קבוצת הקצוות וסיימנו או שקיים K_3 כחול בתוך קבוצת הקצוות ויחד עם v, קיבלנו K_4 כחול.

אם ל $v-$ יש 4 צלעות אדומות ששכנות לו, אזי נתבונן שוב בקבוצת הקצוות שלהם (שהם לא v), אם בין הקבוצה הזו כל הצלעות כחולות, אזי קיבלנו K_4 כחול, אחרת קיימת ביניהם צלע אדומה (u,w). הקודקודים v,u,w יוצרים משולש אדום כדרוש.

נראה כעת את החלק השני:

נתבונן ב - K_8, נסמן את קודקודים ב - 8,...,1,2. נצבע את הקשת (i,j) באדום, אם $j-i$ (כאשר $j>i$) הוא 1,4,7, אחרת נצבע בכחול (ז"א כאשר ההפרש הוא 2,3,5,6).

נניח בשלילה כי בגרף יש משולש אדום. יהי i הקודקוד הקטן ביותר במשולש. בנוסף ל- i במשולש יהיו חייבים להופיע שניים מהקודקודים $i+1, i+4, i+7$, אך לא משנה איך נבחר אותם, תהיה ביניהם צלע שצבועה כחול (ההפרש הוא לא 1,4,7).

נניח בשלילה כי בגרף יש K_4 כחול. יהי i הקודקוד הקטן ביותר במרובע. בנוסף ל- i במרובע יהיו חייבים להופיע שלושה מהקדקודים $i+2, i+3, i+5, i+6$. נשים לב כי לא משנה איך נבחר שלושה קודקודים, נהיה חייבים לבחור או את הזוג $i+2, i+3$ או את הזוג $i+5, i+6$ ולכן נקבל צלע אדומה (הפרש 1).

משפט (*Mantel*, מקרה פרטי של משפט *Turan*): יהי G גרף בעל n קודקודים וללא משולשים. אז ב $G-$ יש לכל היותר $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$ צלעות.

<u>שאלה 7</u>:

נתונות $2n$ $(n>1)$ נקודות שונות במרחב התלת מימדי $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$, ואף שלוש מהן אינן נמצאות על אותו הישר.

נסמן ב $M-$ אוסף כלשהו של n^2+1 קטעים עם הקצוות בנקודות הנתונות.

א. הוכיחו כי קיים משולש שקדקודיו הם מבין הנקודות הנתונות וכל צלעותיו שייכות ל $M-$.

ב. הוכיחו כי המסקנה אינה נכונה בהכרח עבור n^2 קטעים.

<u>פתרון</u>:

א. נתבונן בגרף שקדקודיו ייצגו את הנקודות במרחב ונוסיף צלע לגרף, אם בין שתי הנקודות שתואמות לקדקודים יש קטע ב $M-$. עלינו להראות כי לא ייתכן כי בגרף הזה אין קליקה בגודל 3 (משולש). כידוע ממשפט מאנטל, אם בגרף עם n קודקודים, אין משולשים, אזי יש בו לכל היותר $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$ צלעות. מכאן שאם בגרף שהגדרנו לעיל אין משולשים, אזי ייתכנו בו לכל היותר $\left\lfloor\frac{(2n)^2}{4}\right\rfloor = n^2$ צלעות. בגרף שלנו n^2+1 צלעות אזי בהכרח יש משולש ולכן יש גם משולש (אמיתי) ב $M-$.

ב. נחלק את הנקודות לשתי קבוצות זרות בגודל n. נבחר אוסף קטעים כך שקצה אחד שלהם בקבוצה הראשונה וקצה שני בקבוצה השנייה. באופן זה, נקבל n^2 קטעים. הגרף שתואם (התרגום כמו בסעיף א') לנקודות וקטעים הנ"ל הינו דו-חלקי ולכן בהכרח אינו כולל משולש (עפ"י המשפט שלמדנו כי גרף הוא דו-חלקי אם"ם הוא אינו מכיל מעגלים אי-זוגיים).

<u>שאלה 8</u>: יהי G גרף עם התכונה שבכל קבוצה של 3 קדקודים יש לפחות 2 שהם שכנים. הראה שקיים מספר שלם חיובי n כך שאם מספר הקדקודים של G הוא גדול או שווה ל- n אז G אינו מישורי. מצא את הערך המינימאלי n_0 של n שמקיים את התנאי הזה.

<u>פתרון</u>:

במקום לקפוץ ישר לפתרון האופטימלי, נשתמש בכלים שונים כדי לגלות אינפורמציה על n_0.

(א) נתחיל במספרי רמזי. יש לשים לב שמהנתונים אפשר להסיק שאין משולש בגרף המשלים $\bar{G}$ של G. לכן אם נקח $n \geq R(5,\ 3)$, העובדה שאין תת-גרף איזומורפי ל- K_3 גוררת שיש ל- G תת-גרף איזומורפי ל- K_5 (ההוכחה דומה לפתרון של שאלה 5), ולכן G אינו מישורי.
ממשפט ארדש-סקרש,

$$R(5,\ 3) \leq \binom{5+3-2}{5-1} = \binom{6}{4} = 15,$$

ולכן $n_0 \leq 15$. בעצם, מטבלה של מספרי רמזי אפשר לראות ש- $R(5,\ 3) = 14$, ואז $n_0 \leq 14$.

(ב) עכשיו נעבור למשפט *Mantel*. ראינו שאין ל- $\bar{G}$ משולש, לכן אם יש n קדקודים ב- $\bar{G}$ (וגם ב- G כמובן) אז מספר הצלעות ב- $\bar{G}$ הוא לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. אז מספר הצלעות ב- G הוא לפחות

$$\binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

אם n מספר זוגי, המספר הזה שווה ל-

$$\binom{n}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{2n^2-2n}{4} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2-2n}{4}$$

אנחנו יודעים שאם $|E(G)| > 3\,|V(G)| - 6$ אז G אינו מישורי. אי-השוויון הזה יתקיים (עבור n זוגי) כאשר

$$\frac{n^2-2n}{4} > 3n - 6$$

והמספר הזוגי הראשון שמקיים את אי-השוויון הוא $n = 14$.

אם n אי-זוגי אז $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \frac{n^2-1}{4}$

ולכן אי- השוויון הגורר ש- G מישורי הוא $\frac{n^2-2n+1}{4} > 3n - 6$

שמתקיים כאשר n מספר אי-זוגי $n \geq 13$.

בקיצור, ממשפט *Mantel* אפשר להסיק ש- $n_0 \leq 13$.

(ג) הדרך השלישית משתמשת בתוצאות על צביעת הקדקודים של גרף. יהי $k=\chi(G)$, המספר הכרומטי של G. נתונה k- צביעה של G, אנחנו מסיקים מהנתונים של השאלה שאין יותר משני קדקודים של G מאותו הצבע. מכאן נובע ש- $k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, כאשר n הוא מספר הקדקודים של G. אם $n \geq 11$ אז $k \geq 6$; ממשפט *Heawood* (משפט חמשת הצבעים) נובע ש- G אינו מישורי. ומכיוון שקיים משפט חזק יותר, משפט ארבעת הצבעים, אפשר להסיק שאם $n \geq 9$ אז G אינו מישורי.

אז הגענו לתוצאה ש- $n_0 \leq 9$.

(ד) כאן נוכיח ש- $n_0 = 9$. לאור אי- השוויון שהוכחנו בסעיף הקודם, מספיק למצוא גרף מישורי G על 8 קדקודים שמקיים את הנתונים בשאלה. יהי G גרף עם שני רכיבי קשירות, כאשר כל אחד מהם איזומורפי ל- K_4. אז G מישורי, ונתונה קבוצה כלשהי של 3 קדקודים, יש לפחות 2 מהם ששייכים לאותו רכיב קשירות K_4, ולכן הם שכנים.