<u>להלן כמה שאלות נוספות על אינדוקציה:</u>

שאלה 7 מהתרגיל חזרה:

הוכיחו כי n ישרים במישור יכולים לחלק אותו לכל היותר $\frac{n(n+1)}{2}+1$ אזורים.

פתרון:

<u>בסיס</u>: $n=0$: יש לנו רק אזור אחד ואכן $\frac{0(0+1)}{2}+1=1$.

<u>צעד האינדוקציה</u>: נניח כי עבור $n-1$ ישרים יש לנו $\frac{(n-1)n}{2}+1$ אזורים, כעת אם נוסיף ישר נוסף, במקרה הגרוע הוא יחתך עם כל אחד מה $n-1$ – הישרים הקיימים. סה"כ כך יוצרו n צלעות (צלע היא הקטע המקסימאלי ללא נקודות חיתוך עליו), כל צלע חותכת איזושהי אזור וכך מכל אזור שנחתך ע"י צלע כלשהי נקבל שני אזורים, ז"א יתווספו לנו n אזורים, ז"א עובר n ישרים, נקבל $1+\frac{n(n+1)}{2}=1+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}$ אזורים.

שאלה 9 מהתרגיל חזרה:

תהי A קבוצה סופית מעוצמה $n=|A|$. הוכיחו כי מספר התת קבוצות של A הוא $|P(A)|=2^n$.

פתרון:

נוכיח את הטענה באינדוקציה רגילה על n.

<u>בסיס</u>: $n=0$. במקרה זה $A=\emptyset$, ולכן $P(A)=\{\emptyset\}$ ואכן $|P(A)|=1=2^0$.

<u>צעד האינדוקציה</u>: נניח כי המשפט נכון לכל קבוצה בגודל $n-1$, ונוכיח את הטענה לקבוצה בת n איברים. נניח כי $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. נבחן שני סוגים של תתי קבוצות של A:

1. תת קבוצה שלא כוללת את a_n כאיבר: נשים לב שתת-קבוצה של A שלא כוללת את a_n כאיבר, היא בפשטות תת-קבוצה של $\{a_1,a_2,\dots,a_{n-1}\}$. מספרן של תת-קבוצות אלה הוא 2^{n-1} על פי הנחת האינדוקציה.

2. תת-קבוצות שכוללות את a_n כאיבר: ניתן לראות שגם מספר קבוצות אלו הוא 2^{n-1}, וזאת כי ניתן למצוא פונקציה חח"ע ועל בין תתי קבוצות אלו לבין תת-קבוצות של $\{a_1,a_2,\dots,a_{n-1}\}$. ההתאמה תעשה ע"י השמטת האיבר ה- a_n מן הקבוצה האמורה.

בסה"כ קיבלנו $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$ תת-קבוצות של A, כנדרש.