תרגול 8

פונקציות יוצרות- המשך:

שאלה 1:

בסלסלה נמצאים 7 כדורים אדומים, 10 כדורים צהובים, ו-31 כדורים שחורים.

א. מה מספר הדרכים לבחור 9 כדורים?

ב. מה מספר הדרכים לחלקם לשתי קבוצות מובחנות שוות גודל?

ג. אם יש n כדורים מכל סוג, מה מספר הדרכים לבחור n כדורים כך שיש מספר זוגי של כדורים שחורים? (נניח כי n זוגי)

פתרון:

א. הפו"ר עבור האדומים: $(1+x+x^2+\cdots+x^7)=\frac{1-x^8}{1-x}$

עבור הצהובים: $(1+x+x^2+\cdots+x^{10})=\frac{1-x^{11}}{1-x}$

ועבור השחורים: $(1+x+x^2+\cdots+x^{31})=\frac{1-x^{32}}{1-x}$

נחפש את המקדם של x^9 במכפלה שלהם:

$$\frac{1-x^{11}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{32}}{1-x}\cdot\frac{1-x^8}{1-x}=(1-x^8-x^{11}+x^{19}-x^{32}+\cdots)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}=$$

$$(1-x^8-x^{11}+x^{19}-x^{32}+\cdots)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n$$

$$\Rightarrow\quad a_9=\binom{11}{2}-\binom{3}{2}$$

ב. סה"כ יש 48 כדורים, לכן נחפש את המקדם של x^{24} בפו"ר מסעיף א.

$$a_{24}=\binom{26}{2}-\binom{18}{2}-\binom{15}{2}+\binom{7}{2}$$

ג. הפו"ר לכדורים אדומים זהה לפו"ר עבור כדורים צהובים: $(1+x+x^2+\cdots+x^n)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$,

הפו"ר לכדורים השחורים היא: $(1+x^2+x^4+\cdots+x^n)=\frac{1-x^{n+2}}{1-x^2}$

נחפש את המקדם של x^n במכפלתם:

$$\frac{1-x^{n+2}}{1-x^2}\cdot\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2=\frac{(1-x^{n+2})\cdot(1-x^{n+1})^2}{(1+x)(1-x)^3}=$$

$$=(1-x^{n+2})\cdot(1-x^{n+1})^2\cdot\left[\frac{a}{1+x}+\frac{bx^2+cx+d}{(1-x)^3}\right]=$$

$$=(1-x^{n+2})\cdot(1-x^{n+1})^2\cdot\left[\frac{a(1-x)^3+(bx^2+cx+d)(1+x)}{(1+x)(1-x)^3}\right]$$

ע"מ למצוא את הנעלמים a,b,c,d - קיבלנו את 4 המשוואות:

$$a+d=1$$
$$-3a+c+d=0$$
$$3a+b+c=0$$
$$-a+b=0$$

פתרון מערכת המשוואות נותן את התוצאה: $a=\frac{1}{8}\ ,b=\frac{1}{8}\ ,c=-\frac{1}{2}\ ,d=\frac{7}{8}$

כלומר, נותר לחפש את המקדם של x^n בביטוי: $(1-x^{n+2})(1-x^{n+1})^2\cdot\left[\frac{1/8}{1+x}+\frac{\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}}{(1-x)^3}\right]$

המקדם של x^n בביטוי הנ"ל הוא המקדם של x^n בביטוי:

$$\left[\frac{1/8}{1+x}+\frac{\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}}{(1-x)^3}\right]=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n$$

כלומר, המקדם של x^n הוא: $\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{8}\binom{n}{2}-\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}+\frac{7}{8}\binom{n+2}{2}$

<u>שאלה 2:</u>

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה: $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}+2$, עם תנאי ההתחלה $a_0=3, a_1=7$. פתרו את נוסחת הנסיגה באמצעות פונקציות יוצרות.

<u>פתרון:</u>

נגדיר פונקציה יוצרת $f(x)$ שמתאימה לסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ז"א $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

$$\begin{aligned}
&f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n=\\
&3+7x+\sum_{n=2}^{\infty}(5a_{n-1}-6a_{n-2}+2)x^n=\\
&3+7x+\sum_{n=2}^{\infty}5a_{n-1}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}6a_{n-2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}2x^n=\\
&3+7x+5x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}-6x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}+2\sum_{n=2}^{\infty}x^n
\end{aligned}$$

נזיז את האינדקס של הסכימה:

$$\begin{aligned}
f(x)&=3+7x+5x\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n-6x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+2\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\\
&=3+7x+5x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-a_0\right)-6x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n-x-1\right)=\\
&=3+7x+5x\cdot f(x)-5x\cdot 3-6x^2\cdot f(x)+\frac{2}{1-x}-2x-2=\\
&=1-10x+\frac{2}{1-x}+5x\cdot f(x)-6x^2\cdot f(x)=\\
&=\frac{10x^2-11x+3}{1-x}+5x\cdot f(x)-6x^2\cdot f(x))
\end{aligned}$$

מכך נובע כי

$$f(x)=\frac{10x^2-11x+3}{(1-x)(1-5x+6x^2)}=\frac{(3-5x)(1-2x)}{(1-3x)(1-2x)(1-x)}=\frac{3-5x}{(1-3x)(1-x)}$$

ניתן לפשט ולקבל

$$f(x)=\frac{2}{1-3x}+\frac{1}{1-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

ולכן $a_n=2\cdot 3^n+1$.

<u>תורת הגרפים – מבוא</u>

מושגים:

- תהי V קבוצה סופית לא ריקה, ותהי E קבוצה של זוגות איברים שונים מתוך V.
הזוג $G=(V,E)$ נקרא <u>גרף לא מכוון</u>, אם E קבוצה של זוגות לא סדורים.
הזוג $G=(V,E)$ נקרא <u>גרף מכוון</u>, אם E קבוצה של זוגות סדורים.
איברי הקבוצה V נקראים <u>קודקודים</u> או <u>צמתים</u>.
איברי הקבוצה E נקראים <u>צלעות</u> או <u>קשתות</u>.
הערה: *במהלך הקורס, אלא אם כן מצוין אחרת, במושג גרף נתכוון לגרף לא מכוון.*
- ישנן הרחבות למושג הגרף: <u>מולטי-גרף</u> הוא גרף לא מכוון שבו ייתכנו כמה צלעות בין זוגות של קודקודים. <u>בפסאודו-גרף</u> מתירים גם לולאות (לולאה היא צלע מהקודקוד אל עצמו).
- יהי $G=(V,E)$ גרף לא-מכוון. נאמר ששני קודקודים $u,v\in V$ הם <u>שכנים</u> (או <u>סמוכים</u>) אם קיימת צלע המחברת ביניהם, כלומר $\{u,v\}\in E$. במקרה זה גם נאמר שהצלע $\{u,v\}$ <u>חלה</u> בקודקודים u,v.
יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. נאמר שקודקוד v שכן של קודקוד u אם קיימת צלע מכוונת מ $-u$ אל v, כלומר $<u,v>\in E$. נאמר שהצלע $<u,v>$ חלה בקודקוד u.
- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. <u>הדרגה</u> של קודקוד $v\in V$ היא מספר הצלעות החלות ב $-v$, והיא תסומן ע"י $degree(v)$ או $deg(v)$.
יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. <u>דרגת הכניסה</u> של $v\in V$ היא מספר הצלעות הנכנסות אל v. <u>דרגת היציאה</u> של קודקוד היא מספר הצלעות היוצאות מ $-v$.
אם $degree(v)=0$ נאמר שהקודקוד v <u>מבודד</u>.

משפט הדרגות: בגרף לא מכוון, $G=(V,E)$, מתקיים כי $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$.

- יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. סדרה של קודקודים $(v_0,v_1,\dots,v_p)$ כאשר $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$ לכל $1\le i\le p-1$ נקראת <u>טיול</u>. אם הצלעות $\{v_i,v_{i+1}\}$ כולן שונות זו מזו,נאמר שזהו <u>מסלול</u> (או <u>מסילה</u>).
אם כל הקודקודים לאורך המסלול שונים זה מזה אז המסלול <u>פשוט</u>.
אם $v_0=v_p$ אזי המסלול נקרא <u>מעגל</u>. אם כל הקודקודים לאורך המעגל שונים זה מזה, אז זהו <u>מעגל פשוט</u>.
אורך המסלול $(v_0,v_1,\dots,v_p)$ שווה ל- p, ז"א למספר הצלעות שלאורכו.
יהיו $u,v\in V$ שני קודקודים. <u>המרחק</u> בין u ל $-v$ מוגדר כאורך המזערי של המסלול ביניהם ומסומן ע"י $d(u,v)$. אם אין מסלול בין u ל $-v$ אז מגדירים $d(u,v)=\infty$. <u>קוטר</u> הוא המרחק המקסימלי בגרף בין זוג קודקודים כלשהם.
לגרפים מכוונים, המושגים הנ"ל מוגדרים באופן דומה.
- גרף לא מכוון נקרא <u>קשיר</u> אם יש מסלול בין כל זוג קודקודים. גרף מכוון נקרא <u>קשיר היטב</u> (או קשיר חזק) אם לכל שני קודקודים $a,b\in V$ יש מסלול מ $-a$ ל $-b$ ומסלול מ $-b$ ל $-a$.
- נאמר שגרף $G'=(V',E')$ הוא <u>תת-גרף</u> של G אם $V'\subseteq V$ ו $-E'\subseteq E$ וכן לכל צלע $\{u,v\}\in E'$ מתקיים כי $u,v\in V'$.
- יהי $G=(V,E)$ גרף. <u>הגרף המשלים</u> של G הוא הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$, כאשר קבוצת הקודקודים של $\bar{G}$ זהה לזו של G, ואילו שני קודקודים u,v יהיו שכנים ב - $\bar{G}$ אם ורק אם אינם שכנים ב $-G$.

תרגילים:

<u>תרגיל 1</u>:
הוכיחו כי בכל גרף לא מכוון יש שני קודקודים עם אותה הדרגה.

<u>פתרון</u>:
נבנה תאים שמגדירים את הדרגה של כל קודקוד. דרגה אפשרית לכל קודקוד הוא בין 0 ל – n-1:

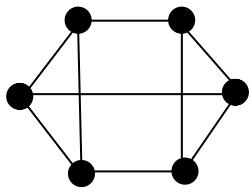
n-1	....	1	0

כעת נחלק את הקודקודים בין התאים, אך ראשית נבחין בין שתי אפשרויות:

1) ישנו קודקוד עם n-1 שכנים. אזי הוא שכן של כולם, ולכן אין קודקוד עם דרגה 0. לכן אנו למעשה מחלקים n הקודקודים בין n-1 תאים וע"פ עקרון שובך היונים יהיו שני קודקודים באותו התא, כלומר עם אותה דרגה.
2) אין קודקוד עם דרגה n-1. אזי אנו למעשה מחלקים n קודקודים בין n-1 תאים וע"פ עקרון שובך היונים יהיו שני קודקודים באותו התא, כלומר עם אותה דרגה.

<u>תרגיל 2</u>:
האם קיים גרף בעל סדרת הדרגות הבאה:
א. 3,3,3,3,3,3
ב. 3,3,3,3,3
ג. 1,1,2,3,4,5

<u>פתרון</u>:
א. כן, למשל:



ב. לא ייתכן גרף כדרוש בסעיף וזאת כי סכום דרגות הקודקודים הוא אי-זוגי.
ג. לא. הקודקוד מדרגה 5 צריך להיות שכן של כל הקודקודים האחרים, אבל אז לקודקוד מדרגה 4 אין מספיק שכנים (שני קודקודים בעלי הדרגה 1 כבר נתפסו, ונותרים רק שני קודקודים עם דרגות "פנויות").

<u>תרגיל 3</u>:
נסמן ב – $\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית ב – G וב – $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית.
הוכיחו כי $\Delta(G) \geq 2 \cdot \frac{|E|}{|V|} \geq \delta(G)$.

<u>פתרון</u>:
עפ"י משפט שראינו מתקיים כי $\frac{\sum_{v\in V} \deg(v)}{|V|} = 2 \cdot \frac{|E|}{|V|}$, סכום הדרגות חלקי מספר הקודקודים הוא הדרגה הממוצעת. הדרגה הממוצעת בהכרח קטנה או שווה מהדרגה המקסימלית וגדולה או שווה מהדרגה המינימלית.
או שניתן לשים לב כי $|V| \cdot \Delta(G) \geq \sum_{v\in V} \deg(v) \geq |V| \cdot \delta(G)$, ואם נשתמש במשפט הדרגות ונחלק ב - $|V|$ נקבל את הדרוש.

<u>תרגיל 4</u>:
האם ייתכן כי בגרף $G=(V,E)$ בו דרגת כל קודקוד היא 3 יהיו 100 צלעות?

<u>פתרון</u>:
לא. מכיוון שצריך להתקיים כי $3|V|=2|E|=200$, ואילו זה לא ייתכן מכיוון ש – 3 לא מחלק את 200.

<u>תרגיל 5</u>:
במדינה מסוימת יש n ערים וחברת תעופה אחת. נתון כי מעיר הבירה יוצאים 21 קווי תעופה ומעיר נתונה נוספת L יוצא רק קו תעופה אחד, מכל שאר הערים יוצאים 20 קווי תעופה. הוכיחו כי ניתן להגיע מעיר הבירה לעיר L (ייתכן כי במעבר בערים נוספות).
(הטענה הכללית: אם בגרף יש בדיוק שני קודקודים עם דרגה אי-זוגית, אז יש מסלול ביניהם).

<u>פתרון</u>:
נתרגם את אוסף הערים ואת קווי התעופה ביניהם לקודקודים וצלעות בגרף בהתאמה. נשים לב כי לא ייתכן כי הקודקוד שמייצג את עיר הבירה והקודקוד שמייצג את העיר L יהיו בשני רכיבי קשירות, וזאת כי אז בכל אחד מהרכיבי קשירות (שהינם גם גרפים בפני עצמם) סכום דרגות הקודקודים יהיה אי-זוגי מה שלא ייתכן עפ"י משפט הדרגות.