תרגול 7

טור פורמלי – בהינתן סדרת מספרים $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, נבנה טור חזקות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, כאשר המקדם של x^n הינו a_n. בהינתן טור פורמלי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נאמר שהפונקציה יוצרת את הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

פעולת חיבור על טורים פורמליים: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$

פעולת כפל על טורים פורמליים: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k \times b_{n-k}) x^n$

<u>נוסחאות חשובות מוכרות:</u>

טור גיאומטרי אין-סופי: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots$

טור גיאומטרי סופי: $\frac{1-x^{m+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^{m} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^m$

הבינום של ניוטון (עבור a=x,b=1): $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

<u>שאלה 1: (דוגמת גזירה)</u>

מצאו את הפונקציה היוצרת של הסדרה $a_n = n + 2$.

<u>פתרון:</u>

אנו יודעים מה ערכי הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ לכל n. נסתכל על הפונקציה היוצרת של הסדרה (כלומר כזו שהמקדם ה- x^n שלה הוא a_n):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{2}{1-x} + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

כיצד נוכל למצוא ביטוי פשוט (ללא סידרה אינסופית) עבור $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$? נגזור את הטור הגיאומטרי:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \xrightarrow{Derivative} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \xrightarrow{Multiplication\ by\ X} \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

כלומר נקבל ש: $f(x) = \frac{2}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}$

<u>שאלה 2:</u>

מצאו את הסדרה שנוצרת ע"י הפונקציה היוצרת $f(x) = \frac{3x}{(1-3x)^2}$.

<u>פתרון:</u>

נבצע החלפת משתנים $a = 3x$ ונקבל ש- $f(\frac{a}{3}) = \frac{a}{(1-a)^2}$. בשאלה הקודמת ראינו ש- $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$, כלומר:

$$\frac{a}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n a^n \rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \times 3^n \times x^n$$

אם כן המקדם בביטוי של x^n היינו $n3^n$, ולכן f(x) יוצרת את הסדרה $(n \times 3^n)_{n=0}^{\infty}$.

<u>שאלה 3 (סדרת מקדמים זוגיים/אי-זוגיים)</u>

נתונה פונקציה יוצרת $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. כיצד:

א. נמצא את הפונקציה היוצרת של הסדרה $(a_0,0,a_2,0,a_3,\ldots)$ – הסדרה שבה כל הערכים עם אינדקסים אי-זוגיים שווים לסדרה המקורית, וכל הערכים עם אינדקסים זוגיים הם אפס?

ב. נמצא את הפונקציה היוצרת של הסדרה $(0,a_1,0,a_3,0,a_5,\ldots)$ – הסדרה שבה כל הערכים עם אינדקסים זוגיים הם אפס, וכל הערכים עם אינדקסים אי-זוגיים שווים לסדרה המקורית?

<u>פתרון:</u>

נסתכל על ערכו של הביטוי $f(-x)$:

$$f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-x^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-1)^n x^n=\sum_{n=0,n\ is\ even}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0,n\ is\ odd}^{\infty}a_n x^n$$

כלומר הסדרה שנוצרת ע"י $f(-x)$ הינה $(a_0,-a_1,a_2,-a_3,\ldots)$.

א. נסתכל על הסדרה שנוצרת ע"י $f(x)+f(-x)$:

$$(a_0+a_0,\ a_1-a_1,\ a_2+a_2,\ a_3-a_3,\ldots)=(2a_0,\ 0,\ 2a_2,\ 0,\ \ldots)$$

כלומר הפונקציה היוצרת הנדרשת הינה $(f(x)+f(-x))/2$.

ב. באותו אופן נגלה שהפונקציה היוצרת של הסדרה הינה $(f(x)-f(-x))\,/\,2$.

<u>שאלה 4 (בינום שלילי)</u>

הוכיחו כי $\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}x^n$

<u>פתרון:</u>

אנו יודעים כי $\frac{1}{(1-x)}=(1+x+x^2+\cdots)$. אם נעלה ביטוי זה בחזקת k נקבל ש-

$$\frac{1}{(1-x)^k}=\underbrace{(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\ldots(1+x+x^2+\cdots)}_{k\ times}.$$

נשאל את השאלה הבאה – מהו המקדם של x^n בביטוי הזה? כל ביטוי x^n מושג ע"י מכפלה של איברים מ-k הסוגרים השונים אשר סכום החזקות שלהם הוא n. כלומר נבחרים $x^{i1}, x^{i2},..,x^{ik}$, כל אחד מסוגר נפרד, כך שסכום ה- i-ים הוא n. מספר האפשרויות להשיג ביטוי x^n (קרי המקדם a_n) הוא מס' הדרכים לבחור את המקדמים $i_1,..,i_k$ – זו הבעיה שבה צריך לחשב מהו מס' האפשרויות לפתור משוואה מהצורה $i_1+\ldots+i_k=n$ בשלמים אי-שליליים. בעיה זו בתורה שקולה לבעיית חלוקת n כדורים זהים ל- k תאים, ואנו יודעים שמס' האפשרויות לפתרון בעיה זו הוא $\binom{n+k-1}{k-1}$.

<u>מתכון לפונקציות יוצרות</u>

בהינתן $A_1,A_2,\ldots,A_r\subseteq N_0$ ו- a_n מוגדר בתור מספר הפתרונות למשוואה $u_1+\ldots+u_r=n$ תחת האילוצים ש- $u_1\in A_1,\cdots,u_r\in A_r$, אזי הפונקציה היוצרת של הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ היא

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\left(\sum_{u_1\in A_1}x^{u_1}\right)\left(\sum_{u_2\in A_2}x^{u_2}\right)\ldots\left(\sum_{u_r\in A_r}x^{u_r}\right)$$

<u>שאלה 5 (מתכון א')</u>

בכמה אופנים ניתן לקבל סכום 7 בהטלת קוביה אדומה וקוביה ירוקה אם באדומה יוצא מספר זוגי?

<u>פתרון:</u>

א. פשוט נספור את מספר האפשרויות: 2 באדומה ו-5 בירוקה, 4 באדומה ו-3 בירוקה, 6 באדומה ו-1 בירוקה.

ב. נבנה פונקציה יוצרת שמתארת את מס' האפשרויות לקבל תוצאה מסוימת בכל אחת מהקוביות בנפרד (כלומר המקדם a_n הוא מספר האפשרויות השונות לקבל את התוצאה n בקובייה).

a. עבור קובייה ירוקה, כל התוצאות 1-6 אפשריות, ויש אפשרות אחת לקבל כל אחת מהן, לכן $a_i = 1$. כל תוצאה אחרת איננה אפשרית ועבורן $a_i = 0$. לכן הפונקציה היוצרת הינה $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$.

b. עבור קוביה אדומה ידוע שהתוצאה היא זוגית, לכן הפונקציה היוצרת במקרה זה הינה $(x^2 + x^4 + x^6)$. (לאי זוגיים אין אפשרות לקבל את התוצאה).

כעת נכפול את הפונקציות היוצרות זו בזו ונקבל פונקציה יוצרת שבה המקדם a_n מתאר את מספר האפשרויות לקבל סכום מסוים בהטלת שתי הקוביות.

כלומר מחפשים את המקדם של x^7 בביטוי $(x^2+x^4+x^6)(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$. המקדם של x^7 הוא 3.

<u>שאלה 6 (מתכון ב')</u>

בכמה אופנים ניתן לקבל סכום 17 בהטלת 4 קוביות שונות?

<u>פתרון:</u>

(ניתן לפתור ע"י חלוקת כדורים לתאים, נרצה לפתור ע"י פונקציות יוצרות)

לכל קוביה, הפונקציה היוצרת המתארת את מס' ההטלות שנותנות תוצאה מסוימת היא הפונקציה $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$. נכפיל את הפונקציות היוצרות של ארבעת הקוביות, ונחפש את המקדם של x^{17} במכפלה.

$$\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)^4 = x^4\left(1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4 = x^4\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

המקדם של x^{17} בביטוי זה זהה למקדם של x^{13} בביטוי $\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$. נחפש אם כן אותו:

$$\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = \frac{1}{(1-x)^4}\left(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24}\right)$$

כיוון שבטור החזקות של $\frac{1}{(1-x)^4}$ כל חזקות ה- x הן אי-שליליות, לא נוכל לקבל ביטויים מהצורה x^{13} מאיברים x^i, $i>13$ בסוגר הימני. לכן נזניח אותם.

$$\frac{1}{(1-x)^4}\left(1-4x^6+6x^{12}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n\right)\left(1-4x^6+6x^{12}+\cdots\right)$$

לכל ביטוי בסוגר הימני יש איבר יחיד בסכימה בסוגר השמאלי כך שמכפלתם נותנת x^{13}, וסה"כ נקבל ש- a_{13} בביטוי היינו: $\binom{16}{3}-4\binom{10}{3}+6\binom{4}{3}$

<u>שאלה 7 (סכום א')</u>

מהו ערך הביטוי $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2$?

<u>פתרון:</u>

ידועה לנו הפונקציה היוצרת: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ (הבינום של ניוטון עבור a=x,b=1). נבצע על ביטוי זה את המניפולציות הבאות:

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \xrightarrow[derivative]{} n(x+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} \xrightarrow[Multiplication\ by\ X]{} nx(x+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^k$$

$$\xrightarrow[derivative]{} n(x+1)^{n-1}+n(n-1)x(x+1)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2x^{k-1}$$

נציב כעת בביטוי שהתקבל x=1, ונקבל ש- $2^{n-1}n+n(n-1)2^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2$

<u>שאלה 8:</u>

מצאו ביטוי ללא סכום המתאר את k $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+3}{3}$?

<u>פתרון:</u>

נסמן $b_k=\binom{k+3}{3}\to a_k=k, b_{n-k}=\binom{n-k+3}{3}$ שתי סדרות מספרים. נמצא את הפונקציות היוצרות של כל אחת מהן בנפרד, כלומר נמצא $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ונמצא $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$. נתבונן בטור הפורמלי של f(x)g(x) – ע"פ נוסחת הכפל, הוא שווה ל-

$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\times\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_k\times b_{n-k})x^n$, נשים לב שהמקדם של x^n בביטוי הוא בדיוק הביטוי שאנחנו אמורים לחשב, כיוון ש- $\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n-k+3}{3}$.

הפונקציה היוצרת $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$ (חושב בשאלה 1), $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\frac{1}{(1-x)^4}$.

כלומר $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_k\times b_{n-k})x^n=\frac{x}{(1-x)^6}=x\sum_{n}^{\infty}\binom{n+5}{5}x^n=\sum_{n}^{\infty}\binom{n+5}{5}x^{n+1}$, ומכאן נובע שהמקדם של x^n הוא $\binom{n+4}{5}$.

<u>מתכון לחלוקות עם אילוצים</u>

חלוקה של n היא דרך לרשום את n כסכום של מחוברים טבעיים (לאו דווקא שונים) ללא חשיבות לסדר.

אם a_n הוא מספר החלוקות של n למחוברים $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, כאשר לכל λ_i קיימת קבוצת אילוץ $A_i\subseteq N_0$ כך שמספר ההופעות של λ_i בכל חלוקה תקינה בהכרח שייך ל- A_i, אזי הפונקציה היוצרת של (a_n) היא:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\left(\sum_{u_1\in A_1}(x^{\lambda_1})^{u_1}\right)\left(\sum_{u_2\in A_2}(x^{\lambda_2})^{u_2}\right)\cdots\left(\sum_{u_r\in A_r}(x^{\lambda_r})^{u_r}\right)$$

<u>שאלה 9:</u>
מהו מספר החלוקות של n למחוברים אי-זוגיים שונים? חשבו את הפונקציה היוצרת.

<u>פתרון:</u>
עבור כל מספר 2m (זוגי) מתקיים ש- A_{2m} היא הקבוצה הריקה – שכן מספרים זוגיים לא משתתפים בחלוקה. עבור כל מספר 2m+1 (אי-זוגי) – מתקיים ש- $A_{2m+1} = \{0,1\}$, שכן אם החלוקה היא למספרים שונים, כל מספר אי זוגי יכול להופיע בחלוקה פעם אחת לכל היותר.
על פי 'המתכון', נקבל שהפונקציה היוצרת של a_n (מספר החלוקות הנדרש) היא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{u_1\in\{0,1\}} (x^1)^{u_1}\right)\left(\sum_{u_3\in\{0,1\}} (x^3)^{u_3}\right)\left(\sum_{u_5\in\{0,1\}} (x^5)^{u_5}\right)\cdots = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots$$

ו- a_n הוא המקדם של x^n בביטוי.

<u>שאלה 10:</u>
הוכיחו כי לכל מספר טבעי n הצגה בינארית יחידה, כלומר חלוקה יחידה לסכום חזקות שונות של 2.
<u>פתרון:</u>
הבעיה היא למעשה כמה חלוקות יש ל-n למספרים שהם חזקות שונות של 2.
עבור כל מספר 2^K (k טבעי) מתקיים שקבוצת האילוצים עבורו היא {0,1} שכן הוא יכול להופיע לכל היותר פעם אחת בחלוקה. עבור כל מספר אחר קבוצת האילוצים היא ריקה (כיוון שאם הוא איננו חזקה של 2 המספר לא יכול להופיע כלל בחלוקה).
אם כן ע"פ המתכון נקבל שהפונקציה היוצרת של a_n (מספר החלוקות האפשרי) היא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{u_1\in\{0,1\}} (x^1)^{u_1}\right)\left(\sum_{u_2\in\{0,1\}} (x^2)^{u_2}\right)\left(\sum_{u_3\in\{0,1\}} (x^4)^{u_3}\right)\cdots = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots$$

נחליף כל ביטוי במכפלה תוך שימוש בטור הגיאומטרי הסופי:

$$= \left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)\left(\frac{1-(x^2)^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-(x^4)^2}{1-x^4}\right)\cdots = \left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^4}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^8}{1-x^4}\right)\cdots$$

נסדר את האיברים קצת אחרת:

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^4}{1-x^4}\right)\left(\frac{1-x^8}{1-x^8}\right)\cdots = \frac{1}{1-x}$$

נימוק נוסף:

נשים לב כי יש לנו דרך נוספת להציג את הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n == \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\ldots}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\ldots}\right) = \frac{1}{1-x}$$

נשים לב כי במונה ובמכנה יש לנו בעצם פונקציה יוצרת של אותו טור החזקות, לכן המנה שלהם שווה ל – 1.

קיבלנו את הטור הגיאומטרי האין-סופי. אנחנו יודעים שבטור זה מקדם כל X^N הינו 1, לכן לכל N תהיה חלוקה יחידה לחזקות שונות של 2 ומכאן הצגה בינארית יחידה.