תרגול 6- נוסחאות נסיגה- ניסוח ופתרון

חלק 1: ניסוח נוסחאות נסיגה.

<u>שאלה 1</u>:

נתון לוח ונתונים מספר לא מוגבל של אריחים בגודל $1x1,1x2$ (משבצות). מצאו נוסחת נסיגה המתארת את מספר הכיסויים האפשרי ללוח ע"י האריחים בהינתן ש:

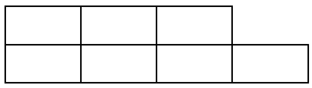
א. הלוח בגודל $1\ x\ n$

ב. הלוח בגודל $2\ x\ n$

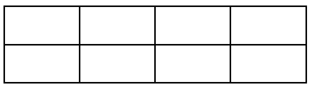
<u>פתרון</u>:

א. קל להיווכח שזוהי בעיה המתוארת ע"י נוסחת נסיגה שהפתרון הכללי שלה זהה לפתרון הכללי של סדרת פיבונאצ'י – אם הנחנו אריח ראשון באורך 1 נשאר לנו לכסות $n-1$, ואילו אם הנחנו אריח באורך 2 אזי נשאר לנו לכסות $n-2$ משבצות. ערכי ההתחלה הם $a_1\ =\ 1$, $a_2 = 2$ והנוסחה הינה $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

ב. נסמן ב- a_n את מספר הריצופים האפשרי ללוח בגודל $2\ x\ n$. הבעיה המתעוררת היא שמכיוון שהלוח בעל שתי שורות ויש לנו אריחים המכסים משבצת בודדת, ייתכן שנגיע למצב שבו יש חוסר סימטריה – בשורה אחת כיסינו יותר משבצות מבשורה השנייה. נסמן אם כן ב- b_n את מספר הריצופים האפשרי של לוח עם 2 שורות, בשורה הראשונה n משבצות ובשנייה $n-1$.



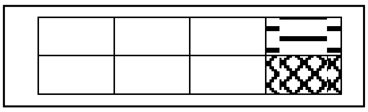
b_4 מתאר את מספר הכיסויים של לוח זה



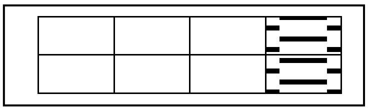
a_4 מתאר את מספר הכיסויים של לוח זה

בהינתן לוח נבחן את כל האפשרויות לכסות את העמודה הראשונה שלו:

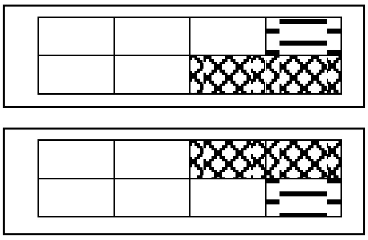
שני אריחים בגודל 1x1, מותיר a_{n-1} אפשרויות להמשך



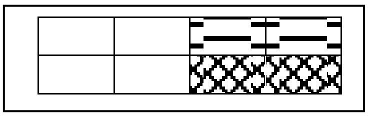
אריח בגודל 1x2, מותיר a_{n-1} אפשרויות להמשך



אריח בגודל 1x1 ואריח בגודל 1x2. מותיר $2b_{n-1}$ אפשרויות להמשך.



2 אריחים בגודל 1x2. מותיר a_{n-2} אפשרויות להמשך.



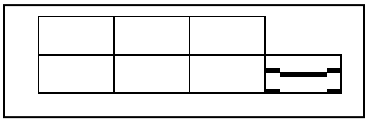
כלומר סה"כ קיבלנו ש-

$$a_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + a_{n-2}$$

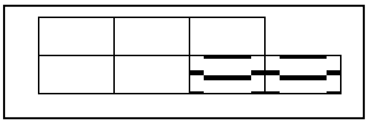
(כיוון שכיסינו את כל הדרכים האפשרויות לכסות את העמודה הראשונה, בהכרח כל כיסוי חוקי מכסה את העמודה באחד מהאופנים הללו).

באותו אופן, בהינתן לוח המתאים ל- b_n (כלומר כזה שחסרה לו משבצת בעמודה הראשונה), מהן האפשרויות לכסות את העמודה החסרה?

אריח בגודל $1x1$. ישנן a_{n-1} אפשרויות להמשך.



אריח בגודל $1x2$. ישנן b_{n-1} אפשרויות להמשך.



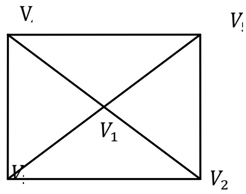
כלומר נקבל ש- $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

כעת, נמצא נוסחה ל - a_n שלא תלויה בסדרה b_n:

מהשוויון הראשון שקיבלנו, נקבל כי $b_{n-1} = \frac{1}{2}a_n - a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$, נזיז את האינדקס ב1 ונקבל- $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}$, נציב בנוסחה השנייה את הביטויים לעיל, ונקבל $\frac{1}{2}a_{n+1} - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n - a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$, נפשט ונקבל $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1} - a_{n-2}$, שוב נזיז את האינדקס ב – 1 ונקבל את נוסחת הנסיגה הבאה: $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$. ערכי ההתחלה הינם $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $a_3 = 22$

<u>שאלה 2</u>:

G הוא הגרף הבא:



מהו מספר המסלולים (לאו דווקא פשוטים) המתחילים ב- v_1 באורך n?

<u>פתרון</u>:

נסמן ב – a_n את מס' המסלולים באורך n צלעות המתחילים בקדקוד- v_1. נסמן ב- b_n^i את מספר המסלולים באורך n המתחילים בקדקוד- v_i עבור $i = 2,3,4,5$.

קל להיווכח משיקולי סימטריה ש- $b_n^2 = b_n^3 = b_n^4 = b_n^5$. נסמן גודל זה פשוט כ- b_n.

מסלול שמתחיל בקדקוד v_1, הקשת הראשונה שלו מוליכה אותו אל אחד הקדקודים האחרים – כלומר $a_n = 4b_{n-1}$ (יש 4 אפשרויות לקשת הראשונה). מסלול שמתחיל בקדקוד שאיננו v_1, יש לו 2 קשתות המוליכות ממנו לקדקודים שאינם v_1 וקשת ל- v_1, כלומר $b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1}$. ניפטר מגורמי ה- b-ים ע"י הצבה ונקבל $\left(\frac{1}{4}\right)a_{n+1} = \left(\frac{2}{4}\right)a_n + a_{n-1}$, כלומר $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2}$.

<u>שאלה 3:</u>
מצאו נוסחת נסיגה המתארת את מספר המילים מעל $\{0,1\}$ באורך n שאינן כוללות את הרצף 111?

<u>פתרון:</u>
נסמן ב- a_n את מספר המילים הבינאריות באורך n שאינן כוללות את הרצף 111. נחלק את המילים ל-3 קבוצות:

- b_n יסמן את מספר המילים הבינאריות כנדרש המסתיימות ב- 011
- c_n יסמן את מספר המילים הבינאריות כנדרש המסתיימות ב- 01
- d_n יסמן את מספר המילים הבינאריות כנדרש המסתיימות ב- 0

קל להיווכח ש- $a_n = b_n + c_n + d_n$, שכן לכל מילה חוקית חייבת להיות סייפא ששייכת לאחת הקבוצות, והחיתוך שלהן הוא זר.
נשאל אם כן מהו הקשר בין הגדלים הללו:

- נניח שיש לנו מילה באורך $n-1$ ששייכת ל- b_{n-1} ורוצים להשלים אותה למילה באורך n ע"י הוספת תו בסופה. אם נוסיף 1 נקבל מילה לא חוקית (מסתיימת ב- 111), לכן האפשרות היחידה להשלים אותה היא ע"י הוספת 0 וקבלת מילה באורך n המסתיימת ב-0.
- נבחן מילה באורך $n-1$ שנמנתה ב-c_{n-1}. ניתן להשלים אותה ע"י 1 וקבלת מילה המסתיימת ב- 011 או ע"י 0 וקבלת מילה המסתיימת ב-0.
- נבחן מילה באורך $n-1$ שנמנתה ב-d_{n-1}. ניתן להשלים אותה ע"י 1 וקבלת מילה המסתיימת ב- 01 או ע"י 0 וקבלת מילה המסתיימת ב- 0.

כיוון שכל מילה באורך $n-1$ בהכרח נמנית באחת מהקבוצות, ולא קיימת מילה באורך n שהרישא של$n-1$ התווים הראשונים שלה איננה חוקית, נבחנו סך הכל- כל האפשרויות להשיג מילה חוקית באורך n. נסכום אם כן את האפשרויות:
$b_n = c_{n-1}, c_n = d_{n-1}, d_n = b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}$ כלומר $d_n = a_{n-1}$. נחליף בשוויון הראשון את כל הביטויים באיברי הנוסחה ונקבל:
$$a_n = b_n + c_n + d_n = c_{n-1} + d_{n-1} + a_{n-1} = d_{n-2} + a_{n-2} + a_{n-1} = a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1}$$
כלומר $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$.
ערכי ההתחלה הינם $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7$.

<u>שאלה 4:</u>
נתונה נוסחת הנסיגה- $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$ עם ערכי ההתחלה- $a_0 = 1, a_1 = 3$.
מצאו פתרון כללי לנוסחת הנסיגה.
<u>פתרון:</u>
נציב תחילה כמה ערכים בנוסחת הנסיגה-
$$a_2 = 7*3-12*1 = 9,\ a_3 = 7*9-12*3 = 27,\ a_4 = 7*27-12*9 = 81$$
ננחש שהפתרון הכללי הינו- $a_n = 3^n$.
נוכיח באינדוקציה שניחשנו נכון.
בסיס: $a_0 = 3^0, a_1 = 3^1$.
צעד: נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n.
נתבונן בנוסחה: $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$. לפי הנחת האינדוקציה- מתקיים
$a_n = 7*3^{n-1} - 12*3^{n-2}$ נפתח את הביטוי ונקבל-
$a_n = 7*3^{n-1} - 12*3^{n-2} = 3^{n-1}(7-4) = 3^n$ כנדרש, מש"ל.

חלק 2: פתרון נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות:

הגדרות:

נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים הינה נוסחת נסיגה מהצורה הבאה:

$$\mathrm{f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \cdots + c_r f(n-r)}$$

כאשר $c_1, c_2, \ldots, c_r$ הינם מספרים ממשיים <u>קבועים</u>.

הפולינום האופייני של נוסחת נסיגה כזו הוא:

$$P(x) \;=\; x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} \;-\cdots-\; c_r$$

המשוואה האופיינית של נוסחת הנסיגה היא:

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} \;-\cdots-\; c_r = 0$$

פתרון נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית:

כדי למצוא פתרון לנוסחת נסיגה כזו, נבצע מספר שלבים:

1. נמצא את שורשי המשוואה האופיינית $\mathrm{x_1, \ldots, x_t}$.
2. במידה וישנם r שורשים שונים, הפתרון הכללי יהיה מהצורה:
$$f(n) = \; A_1(x_1)^n \;+\; \ldots \;+\; A_r(x_r)^n$$
3. במידה וישנם שורשים ולהם ריבוי גדול מ-1, נסמן ב-$\mathrm{d_i}$ את הריבוי של x_i במשוואה, אזי הפתרון הכללי יהיה מהצורה:
$$f(n) = \; A_1(x_1)^n \;+\; nA_2(x_1)^n + \cdots + n^{d_1-1}A_{d_1}(x_1)^n \;+\; A_{d_1+1}(x_2)^n + \cdots$$

נשתמש ב- r ערכי התחלה ידועים ונקבל מערכת של r משוואות מהן נחלץ את $\mathrm{A_1, \ldots, A_r}$.

הערה:

פריקות מעל $\mathbb{Z}$ ו - $\mathbb{Q}$:

בהינתן פולינום $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ אזי אם קיים לו שורש רציונלי $\frac{c}{d}$ כך ש – $c, d \in \mathbb{Z}$ זרים ו – $d \neq 0$ אזי בהכרח d מחלק את a_n ו – c מחלק את a_0.

<u>שאלה 5:</u>

מצאו את צורת הפתרון כללי עבור נוסחאות הנסיגה הבאות:

א. $a_n \;=\; 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$

ב. $a_n \;=\; -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

ג. $a_n \;=\; 9a_{n-1} - 26a_{n-2} + 24a_{n-3}$

ד. בעבור סעיפים א, ב, פתרו את נוסחאות הנסיגה עבור ערכי ההתחלה $a_0 \;=\; 1, a_1 \;=\; 3$.

<u>פתרון:</u>

בכל המקרים יש לנו נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים, לכן נמצא את השורשים של המשוואה האופיינית של כל אחד מהם, מהם נוכל לבנות את הפתרון הכללי.

סעיף א':

המשוואה האופיינית הינה $x^2 - 7x \;+\; 12 = 0$ השורשים שלה הם 3 ו-4 ועל כן הפתרון הכללי של הנוסחה הוא מהצורה $a_n \;=\; 3^n A \;+\; 4^n B$.

סעיף ב':
המשוואה האופיינית הינה $x^2 + 4x + 4 = 0$, יש לה שורש יחיד 2- בריבוי 2. על כן לפתרון הכללי תהיה הצורה $a_n = (-2)^n A + (-2)^n nB$.
סעיף ג':
המשוואה האופיינית הינה $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. מקרה זה מסובך יותר מן המקרים הקודמים שכן הפולינום ממעלה שלישית – נחפש שורש (פתרון) ע"י ניחוש:
ננחש ש-1 הינו פתרון של המשוואה: נציב 1 ונקבל $1 - 9 + 26 - 24 = 0 \rightarrow -6 = 0$, לא נכון.
ננחש ש-2 הינו פתרון של המשוואה: נציב 2 ונקבל $8 - 36 + 52 - 24 = 0 \rightarrow 0 = 0$, נכון.
כעת שאנו יודעים ש- 2 הוא שורש של המשוואה, נחלק את הפולינום האופייני ב- $(x-2)$ כדי לקבל רכיב שהוא פולינום ממעלה שנייה. נקבל $(x-2)(x^2 - 7x + 12)$. אם כן למשוואה 3 שורשים שונים 2,3,4 ולכן הפתרון הכללי הינו מהצורה $a_n = 2^n A + 3^n B + 4^n C$.
סעיף ד':
מצאנו כבר את המשוואה האופיינית של כל אחת מהנוסחאות. כעת נציב את ערכי ההתחלה – נקבל 2 משוואות בשני נעלמים וע"י פתרון שלהן נמצא את ערכי A ו- B המתאימים:
עבור סעיף א':

$$a_0 = 1 = 3^0 A + 4^0 B \rightarrow A = -B + 1$$
$$a_1 = 3 = 3^1 A + 4^1 B \rightarrow 3 = 3(-B + 1) + 4B = B + 3 \rightarrow B = 0 \rightarrow A = 1$$
$$a_n = 3^n$$

עבור סעיף ב':

$$a_0 = 1 = (-2)^0 A + (-2)^0 * 0 * B \rightarrow A = 1$$
$$a_1 = 3 = (-2)^1 A + (-2)^1 * 1 * B \Rightarrow 3 = -2 * 1 - 2B \Rightarrow B = -\frac{5}{2}$$
$$a_n = (-2)^{n-1}(5n - 2)$$

<u>שאלה 6:</u>
מצאו את פתרונות 2 הנוסחאות הבאות: $a_n = -2a_{n-1} + 4b_{n-1}$ ו- $b_n = -5a_{n-1} + 7b_{n-1}$ כאשר ערכי ההתחלה הינם $a_1 = 4, b_1 = 1$.

<u>פתרון:</u>
ראשית נשים לב שיש כאן 2 נוסחאות נסיגה התלויות זו בזו. נרצה לבטא את איברי a_n רק ע"י איברי הסדרה (להפריד מהסדרה השנייה). נשים לב ש- $4b_{n-1} = a_n + 2a_{n-1}$, כלומר $4b_n = a_{n+1} + 2a_n$.
נציב במשוואה השנייה ונקבל ש- $\left(\frac{1}{4}\right) a_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right) a_n = -5a_{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right) a_n + \left(\frac{14}{4}\right) a_{n-1}$.
נסדר איברים ונשנה אינדקסים ונקבל ש- $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.
המשוואה האופיינית היא $x^2 - 5x + 6 = 0$, ושורשיה הם $x_1 = 2 , x_2 = 3$. הפתרון הכללי של הנוסחה הינו מהצורה $a_n = 2^n A + 3^n B$. חסר לנו ערך התחלה עבור הנוסחה (יש לנו רק את a_1) ולכן נחלץ את a_2 מהנוסחה הראשונה: $a_2 = -2a_1 + 4b_1 = -8 + 4 = -4$.
נמצא עתה ערכי A ו-B אשר עבורם הפתרון יהיה נכון עבור a_1, a_2. נקבל את 2 המשוואות הלינאריות הבאות: $a_1 = 2^1 A + 3^1 B = 4 \rightarrow A = -\left(\frac{3}{2}\right) B + 2$

$$a_2 = 2^2 A + 3^2 B = -4 \rightarrow 4\left(2 - \left(\frac{3}{2}\right) B\right) + 9B = -4 \rightarrow 8 + 3B = -4$$

נקבל אם כן ש- $B = -4, A = 8$, והפתרון לנוסחה הוא

$a_n = 2^n * 8 - 3^n * 4 = 2^{n+3} - 3^n * 4$.

כעת נותר לחשב את הנוסחה השנייה – נעשה זאת בעזרת הנוסחה $4b_n = a_{n+1} + 2a_n$ (ע"י הצבה):

$$b_n = \left(\frac{1}{4}\right)(2^{n+4} - 3^{n+1} * 4 + 2^{n+4} - 3^n * 8) = \left(\frac{1}{4}\right)(2^{n+5} - 3^n * 20)$$
$$= 2^{n+3} - 3^n * 5$$

<u>שאלה 7:</u>

נתונה מטריצה ריבועית A בגודל $p\ x\ p$ ($p \geq 2$), כאשר ערכי המטריצה הם 0 באלכסון הראשי ו-1 במקומות האחרים. תארו את A^k.

דוגמא של A עבור המקרה $p = 5$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

נרצה לראות מהו הקשר בין איברי המטריצה A לאחר העלאתה בחזקה לבין איברי המטריצה המקורית.
נסמן את ערך איברי האלכסון במטריצה A^c בתור a_c ואת האיברים בכל יתר המטריצה כ b_c.
ניתן לראות ש- a_1, b_1 מוגדרים נכון (שהרי כל איברי האלכסון שווים וכל האיברים האחרים שווים), אולם לא ברור מיידית שאכן ניתן להגדיר הגדרה כזו שכן לא מובטח לנו שאכן שוויונות אלו מתקיימים לאחר ההעלאה בחזקה. טענת העזר הבאה תראה בין היתר שהגדרה זו הינה נכונה:

טענת עזר– מתקיים: $a_{c+1} = (p-1)b_c$, $b_{c+1} = (p-2)b_c + a_c$

הוכחה– באינדוקציה על c.

מקרה בסיס הוא $c = 1$.

נתבונן ב- A^2:

נסמן ב- $A_{i,j}$ תוצאה של מכפלה סקלארית של שורה i ועמודה j.

כעת, אם $i = j$, $A_{i,i}$ הינו תוצאה של הכפלת השורה iה בטור הi. כיוון שעל האלכסון הראשי ישנה קואורדינטה יחידה בה שני הווקטורים מכילים אפס, וזו בדיוק הקואורדינטה ה i– בשניהם, וכיוון שייתר ההכפלות הינן של $1 * 1$, המכפלה הינה $(p-1)$ כלומר $a_2 = (p-1) * 1 = (p-1)b_1$. כאשר $i \neq j$ ישנן 2 קואורדינטות בהן באחד מהווקטורים מופיע 0. יתר הרכיבים הם 1, ועל כן המכפלה היא $b_2 = (p-2) * 1 + 0 = (p-2)b_1 + a_1$ כנדרש.

נניח נכונות עבור c ונראה נכונות עבור $c + 1$: נתבונן על A^{c+1} בתור מכפלה של $A * A^c$. ע"פ הנחת האינדוקציה, אנו יודעים שאיברי A^c אכן מוגדרים נכון ע"י הסדרה. מאותם שיקולים כמו במקרה הבסיס נקבל את התוצאה הנדרשת. נתבונן בערך $(A^{c+1})_{i,j}$ כלשהו במטריצה שהתקבלה מההכפלה.
נתבונן בווקטור שורה i במטריצה A^c, במיקום ה i– יש בו את הערך a_c ובשאר המיקומים יש את הערך b_c עפ"י הנחת האינדוקציה. אם $i = j$, אז את a_c נכפיל ב –0 ואת השאר ב – 1, לכן $a_{c+1} = (p-1)b_c$.
אם $i \neq j$, אזי נכפיל ב – 0 את אחד מה b_c– ולכן $b_{c+1} = (p-2)b_c + a_c$ כנדרש.

כיוון ש- p הוא פרמטר קבוע, $(p-1),(p-2)$ הם מספרים קבועים ויש לנו נוסחאות נסיגה במקדמים קבועים. נבטא את a_c באמצעות איברי הסידרה שלו בלבד. ע"י הצבות ושינויי אינדקסים נקבל ש- $a_c = (p-2)a_{c-1} + (p-1)a_{c-2}$. המשוואה האופיינית של נוסחת הנסיגה הזו היא $x^2 - (p-2)x - (p-1) = 0$.

נמצא את שורשי המשוואה האופיינית:

$$\frac{\mathrm{p}-2\pm\sqrt{(p-2)^2+4(p-1)}}{2} = \frac{\mathrm{p}-2\pm\sqrt{p^2}}{2} = \frac{\mathrm{p}-2\pm\mathrm{p}}{2}$$

השורשים הם 1- ו- $(\mathrm{p}-1)$. הפתרון הכללי הוא מהצורה $\mathrm{a}_c = (\mathrm{p}-1)^{\mathrm{c}}\mathrm{A} + (-1)^{\mathrm{c}}\mathrm{B}$.
תנאי ההתחלה שלנו הם $a_1 = 0$, $a_2 = (p-1)$, נחפש את הפתרון המתאים:

$$a_1 = (p-1)A - B = 0 \rightarrow B = (p-1)A$$

$$a_2 = (p-1)^2A + B = (p-1) \rightarrow (p-1)^2A + (p-1)A = (p-1) \rightarrow$$

$$(p-1)A + A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{p}$$

לכן $\mathrm{B} = \frac{p-1}{p}$ והפתרון היינו $a_c = \left(\frac{p-1}{p}\right)[(p-1)^{c-1} + (-1)^c]$

נמצא את b_c ע"י הצבת הפתרון ונקבל ש- $\mathrm{b}_c = \left(\frac{1}{\mathrm{p}}\right)[(\mathrm{p}-1)^{\mathrm{c}} + (-1)^{\mathrm{c}+1}]$

כעת אין כל קושי לתאר את ערכי המטריצה A^k – שכן ערכי האלכסון הראשי שלה הם a_k וערכי יתר איברי המטריצה הינם b_k.