תרגול 5 – עקרון ההכלה וההדחה

הקדמה:

ראינו כי עפ"י עקרון הסכום, אם A ו B– קבוצות סופיות וזרות אז $|A \cup B| = |A| + |B|$. אבל מהי עוצמת $|A \cup B|$ כאשר הקבוצות A ו B– אינן זרות?

עבור **2** קבוצות: אם A ו B– קבוצות סופיות כלשהן, אזי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

עבור **3** קבוצות: אם A, B ו C– קבוצות סופיות, אזי

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

עקרון ההכלה וההדחה: תהיינה $A_1, A_2, .., A_n$ קבוצות סופיות. אזי

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

מסקנה: תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ קבוצות סופיות. אזי

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

תרגילים:

תרגיל 1:

כמה מספרים בין 1 ל – 1000 מתחלקים בלפחות אחד מהמספרים 2,3,5?

פתרון:

נגדיר את הקבוצות הבאות:

A_2 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 2.

A_3 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 3.

A_5 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 5.

רוצים למצוא את גודל הקבוצה $A_2 \cup A_3 \cup A_5$.

ניתן לראות כי:

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500, |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333, |A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

בנוסף:

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66, |A_5 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100$$

וגם:

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

לכן הפתרון הוא $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = (500 + 333 + 200) - (166 + 66 + 100) + 33 = 734$.

תרגיל 2:

בכמה דרכים ניתן לחלק 80 כדורים זהים ל – 5 תאים כך שבאף תא לא יהיו יותר מ – 24 כדורים?

פתרון:

סך כל הדרכים לחלק 80 כדורים זהים ל – 5 תאים: $\binom{80+5-1}{5-1}$.

נסמן ב A_i– את קבוצת הדרכים בהן בתא ה- i יש יותר מ – 24 כדורים.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = \sum_{i=1}^{5} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 5} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$
$$(\text{סכום חיתוכי רביעיות}) + (\text{חיתוך כל החמישיה}) = 5 \cdot \binom{55+5-1}{5-1} + \binom{5}{2}\binom{30+5-1}{5-1} - \binom{5}{3}\binom{5+5-1}{5-1}$$

הפתרון הוא: $|\cup_{i=1}^{5} A_i|$ – סך האפשרויות.

<u>תרגיל 3:</u>
מה מספר הסידורים (ללא חזרות) של *MATHEMATICS* שאינן מכילות את התת-סדרות *CAT*, *MAT*, *THE*?

<u>פתרון:</u>
נגדיר:
A_1- הרצף *MAT* מופיע.
A_2- הרצף *CAT* מופיע.
A_3- הרצף *THE* מופיע.
במילה *MATHEMATICS* יש 11 אותיות.
מתקיים כי:
$|A_1| = \binom{9}{1,1,\dots,1} - \binom{7}{2,1,\dots,1} = 9! - \frac{7!}{2}$ (מספר המילים שבהם מופיע הרצף *MAT*, פחות כמות המילים שבהם מופיע הרצף *MAT* פעמיים).
$|A_2| = \binom{9}{2,1,\dots,1} = \frac{9!}{2}$ כי M מופיעה פעמיים.
$|A_3| = \binom{9}{2,2,1,\dots,1} = \frac{9!}{4}$ כי *A,M* מופיעים פעמיים.

חיתוכים של זוגות:
$|A_1 \cap A_2| = \binom{7}{1,1,\dots,1} = 7!$.
$|A_1 \cap A_3| = \binom{7}{1,1,\dots,1} + \binom{7}{1,1,\dots,1} - \binom{5}{1,1,\dots,1} = 2 \cdot 7! - 5!$ (הגורם הראשון הוא אם הרצפים *MAT* ו – *THE* מופעים, הגורם השני הוא אם הרצף *MATHE* מופיע והגורם השלישי אם *MATHE* ו – *MAT* מופעים).
$|A_2 \cap A_3| = \binom{7}{2,1,\dots,1} + \binom{7}{2,1,\dots,1} = \frac{7!}{2} + \frac{7!}{2} = 7!$ (הגורם הראשון הוא אם מופיעים *CAT* ו – *THE*, הגורם השני הוא אם מופיע *CATHE*) (Mמופיעה פעמיים).

חיתוך של שלושת הקבוצות:
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{5}{1,1,\dots,1} + \binom{5}{1,1,\dots,1} = 2 \cdot 5!$ (הגורם הראשון הוא אם *CAT* ו – *MATHE* מופעים, הגורם השני הוא אם *MAT* ו – *CATHE*).
בסה"כ, $\binom{11}{2,2,2,1,\dots,1}$ – (היחידונים) + (חיתוכי זוגות) – (חיתוך השלשה)

<u>תרגיל 4:</u>
נתונים n כדורים זהים ו – n כדורים צבעוניים בצבעים שונים אחד מהשני.
בכמה דרכים ניתן לחלק את כל הכדורים הנ"ל ל - $2n$ תאים, כאשר בכל אחד מה – n התאים הראשונים יהיה לפחות כדור אחד.

<u>פתרון:</u>
נגדיר A_i $(1 \le i \le n)$ את קבוצת החלוקות בהן התא ה – i ריק.
מתקיים כי $|A_i| = \binom{2n-1+n-1}{n}(2n-1)^n$ לכל $1 \le i \le n$, כמו-כן
$|A_i \cap A_j| = \binom{2n-2+n-1}{n}(2n-2)^n$ לכל $i \neq j$ כך ש - $1 \le i,j \le n$ וכו', לכן בסה"כ, גודלו של הפתרון הוא

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n-k+n-1}{n}(2n-k)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\binom{3n-1-k}{n}(2n-k)^n$$

<u>תרגיל 5:</u>
בכמה דרכים ניתן להושיב n זוגות על ספסל כך שאף אישה **לא** תשב לצד בעלה?

<u>פתרון:</u>
לכל $0 \le k \le n$ מספר הדרכים להושבת $2n$ האנשים, כך שב – k זוגות מסוימים תשב האישה לצד בעלה הוא $(2n-k)! \cdot 2^k$, וזאת מכיוון שמתבוננים בכל זוג מה – k זוגות כבלוק אחד, מספר האפשרויות לסדר אותם על ספסל הוא $(2n-k)!$ ויש עוד 2 סידורים פנימיים בתוך כ"א מהזוגות. לכן מספר הסידורים המבוקש הוא $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(2n-k)! \cdot 2^k$.

תרגיל 6:
נתונה קבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. כמה סדרות שונות באורך $2n$ ניתן ליצור מאברי הקבוצה, כך שכל איבר יופיע פעמיים ולא יהיו שני איברים זהים סמוכים?

פתרון:
נגדיר A_i $(1 \le i \le n)$ את כל הסדרות שמופיע בהם הרצף $a_i a_i$.
לכל i, $|A_i| = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$, לכן $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = \binom{n}{1} \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$.
חיתוך של כל k קבוצות שווה ל – $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$, וזאת כי יש לנו k איברים עבור הזוגות הסמוכים ועוד $2(n-k)$ עבור השאר לסדר בשורה, כלומר $2n-k$ איברים לסדר בשורה. מתוכן יש $n-k$ איברים שכ"א מופיע פעמיים.
סה"כ סכום כל החיתוכים בגודל k, הוא $\binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.
מכאן שהפתרון הוא $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.
הערה: שים לב התוצאה היא כמו לסדר n זוגות כך שאף אישה לא תשב ליד בעלה חלקי 2^n.

תרגיל 7:
מה מספר הפתרונות (בטבעיים) למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$ כאשר לכל i, $i \le x_i \le 3i$?

פתרון:
שאלה שקולה תהיה: בכמה אופנים ניתן לחלק 30 כדורים זהים ל – 5 תאים שונים כך שבתא ה – i יהיו בין i ל - $3i$ כדורים.
דבר ראשון נשים לב כי בכל תא יש בהכרח i כדורים, לכן נשים בתא 1 כדור אחד, בתא 2 שני כדורים,..., בתא 5 חמישה כדורים. באופן זה נותרים לנו 15 כדורים שעלינו להכניס ל – 5 תאים כאשר בתא ה – i מותר לשים בין 0 ל - $2i$ כדורים.
נגדיר A_i עבור $1 \le i \le 5$ את הסידורים בהם יש חריגה בתא ה – i. אם חרגנו בתא ה – i אזי שמנו שם לפחות $2i+1$ כדורים, ז"א נשאים לנו עוד $14 - 2i$ כדורים לחלק בין שאר התאים. כלומר $\binom{14-2i+4}{4}$ אפשרויות סידור. מתקיים כי,
$\sum_{i=1}^{5} |A_i| = \binom{16}{4} + \binom{14}{4} + \binom{12}{4} + \binom{10}{4} + \binom{8}{4}$.
בנוסף, מתקיים כי ,
$|A_2 \cap A_1| + |A_3 \cap A_1| + |A_3 \cap A_2| + |A_4 \cap A_1| + |A_4 \cap A_2| + |A_5 \cap A_1| =$
$\binom{11}{4} + \binom{9}{4} + \binom{7}{4} + \binom{7}{4} + \binom{5}{4} + \binom{5}{4}$ (כל שאר הגורמים הם 0) (החישוב הוא $\binom{15-(2i+1)-(2j+1)+4}{4}$).
בשביל לחרוג ב – 3 תאים, לא ייתכן כי אחד מהם יהיה 4 או 5, לכן $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.
בסה"כ $\binom{19}{4}$ – (היחידונים) + (חיתוכי זוגות) – (חיתוכי שלשות).

תרגיל 8:
מטילים שתי קוביות שונות n פעמים (עם חשיבות לסדר). מה מספר הסדרות שבהן מופיעה כל אחת מבין האפשרויות $(1,1), (2,2), \dots, (6,6)$?

פתרון:
נסמן ב – A_i את קבוצת הסדרות בהם (i,i) לא מופיע.
לכל $1 \le i \le 6$, $|A_i| = 35^n$.
לכל $1 \le i \ne j \le 6$, $|A_i \cap A_j| = 34^n$.
לכל $1 \le k \le 6$ קבוצות, החיתוך שווה ל – $(36-k)^n$.
לכן מספר הסדרות שבהן מופיעה כל אחת מהאפשרויות $(1,1), (2,2), \dots, (6,6)$ הוא $\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} \cdot (36-k)^n$.

אי – סדרים (תמורות ללא נקודות שבת) :

מספר התמורות של $\{1,2,\dots,n\}$ללא נקודת שבת הוא $\frac{n!}{e} \approx n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$.

תרגיל 9:

לכמה פונקציות חח"ע $f:\{1,2,\dots,30\}\to\{1,2,\dots,100\}$ אין נקודת שבת?

פתרון:

נגדיר A_i ($1\le i\le 30$) את קבוצת הפונקציות כל ש – $f(i)=i$.

מתקיים כי $|A_i|=\frac{99!}{70!}$, חיתוך כל k קבוצות שווה ל – $\frac{(100-k)!}{70!}$.

סך כל הפונקציות החח"ע הוא $\frac{100!}{70!}$ לכן הפתרון הוא $\sum_{k=0}^{30}(-1)^k\binom{30}{k}\frac{(100-k)!}{70!}$.

תרגיל 10:

א. בכמה דרכים ניתן להציב על לוח שחמט 8 צריחים כך שלא יאיימו זה על זה?

ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שאף צריח לא יוצב על האלכסון הלבן?

ג. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת אם על כל הצריחים להיות על משבצות לבנות אך לא על האלכסון? (התא השמאלי העליון הוא לבן)

פתרון:

א. בכל שורה נמצא צריח יחיד. כמו כן בכל עמודה נמצא צריח יחיד. אם נמספר את הצריחים מ1 עד 8 לפי השורה שלהם. אז כל שנותר הוא לבחור לכל צריך עמודה . לכן בסה"כ יש $8!$ סידורים כנ"ל.

ב. סידורים אלה מתאימים לתמורות אי-סדר מלא של $\{1,2,\dots,8\}$ וכאלה יש $\left[\frac{8!}{e}\right]$.

ג. כל תמורה המתקבלת כאן מורכבת מאי-סדר מלא של $\{1,3,5,7\}$ ו – $\{2,4,6,8\}$ ועל כן מספרן $\left[\frac{4!}{e}\right]\cdot\left[\frac{4!}{e}\right]$. (שקול לסדר פעמיים קבוצה של 4 צריחים על לוח 4 על 4 ללא הצבה על האלכסון)

פונקצית אוילר:

פונקצית אוילר היא הפונקציה $\phi:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}$ המוגדרת כך: $\phi(1)=1$ ולכל $n>1$, $\phi(n)$ הוא מספר המספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ שזרים ל n –.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, ותהיה $p_1,p_2,\dots,p_k$ רשימת כל הראשוניים השונים המחלקים את n. אז $\phi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

תרגיל 11:

מהו מספר המספרים שזרים ל – 21 וקטנים ממנו?

פתרון:

הראשוניים שמחלקים את 21 הם 3,7 לכן $\phi(n)=21\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)=21\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=12$, ואכן המספרים שזרים ל- 21 מתוך $\{1,2,\dots,21\}$ הם $\{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$.

תרגיל 12:

הוכיחו כי $\phi(n)$ זוגי לכל $n>2$.

פתרון:

ניתן להציג את n בתור מכפלה של ראשוניים: $n=\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i}$. אזי מתקיים:

$\phi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i-1}{p_i}=\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i-1}\cdot\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)$. כל הגורמים במכפלה הם מס' שלמים. $n>2$ לכן יש 2 אפשרויות:

א. הריבוי של 2 גדול מ1: ואז במכפלה $\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{r_i-1}$ מופיע 2 ולכן המספר זוגי.

ב. קיים $p_i>2$ ואז (p_i-1) זוגי ולכן המספר זוגי.