<u>תרגול 4</u>

1. מהו $\sum_{k=2}^{30}\binom{30}{k}\cdot 5^{k}$?

פתרון:

$$\sum_{k=2}^{30}\binom{30}{k}\cdot 5^{k}=\sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}\cdot 5^{k}-\binom{30}{1}5^{1}-\binom{30}{0}5^{0}=$$

$$\sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}\cdot 5^{k}\cdot 1^{30-k}-30\cdot 5-1\cdot 1=(5+1)^{30}-150-1=6^{30}-151$$

משולש פסקל

2. הראו שאם מתחילים מ - $\binom{0}{0}$, ובכל שלב ניתן לרדת ימינה או שמאלה, מספר הדרכים השונות להגיע ל- $\binom{n}{k}$ הוא $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

פתרון: הוכחה באינדוקציה על n $(0\le k\le n)$.

בסיס: n=0 - אז מתחייב ש - k=0, ומספר הדרכים להגיע מ - $\binom{0}{0}$ ל - $\binom{0}{0}$ היא 1.

נניח נכונות עבור n-1 ונוכיח עבור n.

צעד: על מנת להגיע ל - $\binom{n}{k}$ הצעד האחרון בסדרת הצעדים הוא ימינה מ - $\binom{n-1}{k-1}$ או שמאלה מ - $\binom{n-1}{k}$. מהנחת האינדוקציה, מספר הדרכים להגיע ל - $\binom{n-1}{k-1}$ הוא $\binom{n-1}{k-1}$ ומספר הדרכים להגיע ל - $\binom{n-1}{k}$ הוא $\binom{n-1}{k}$.

לכן סה"כ מספר הדרכים להגיע ל - $\binom{n}{k}$ היא $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ (שימו לב כי $\binom{n}{0}$ ו- $\binom{n}{n}$ מוגדרים להיות 1).

מזהות פסקל $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$. מש"ל.

3. הוכיחו את הזהות $\binom{2n}{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i}{i}$ בעזרת זהות פסקל.

פתרון:

מזהות פסקל $\binom{2n}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n-2}$, וכן $\binom{2n-1}{n-2}=\binom{2n-2}{n-2}+\binom{2n-2}{n-3}$.

נציב ונקבל: $\binom{2n}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-2}{n-2}+\binom{2n-2}{n-3}$

באותו אופן ניתן להמשיך: $\binom{2n-2}{n-3}=\binom{2n-3}{n-3}+\binom{2n-3}{n-4}$, וכך הלאה,

ובאופן כללי: $\binom{2n-i}{n-i-1}=\binom{2n-i-1}{n-i-1}+\binom{2n-i-1}{n-i-2}$ לכל $0\le i\le(n-2)$.

ע"י הצבת כל הביטויים האלה נקבל:

$$\binom{2n}{n-1}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-2}{n-2}+\binom{2n-3}{n-3}+\cdots+\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{0}.$$

לבסוף נציב את השוויון: $\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}$ ונקבל את הזהות.

4. א. יש למצוא את מספר הפתרונות במספרים שלמים למשוואה $\sum_{i=1}^{r} n_i=n$, כאשר:

1) $n_i\ge 0$ לכל i.

2) $n_i>0$ לכל i.

ב. נגדיר את S_r להיות אוסף הפתרונות לסעיף א עבור $1\le r\le n$. חשבו את $\sum_{r=1}^{n}|S_r|$.

פתרון:

א. 1) כמו שראינו בשיעור, מספר הפתרונות למשוואה הינו: $\binom{n+r-1}{r-1}$.

2) נגדיר עבור כל n_i משתנה מתאים: $y_\mathrm{i}+1=\mathrm{n_i}$.

כעת אנו נדרשים לפתור את המשוואה $\sum_{i=1}^{\mathrm{r}}(y_\mathrm{i}+1)=\mathrm{n}$, כלומר: $\sum_{i=1}^{\mathrm{r}} y_\mathrm{i}=\mathrm{n}-\mathrm{r}$

תחת האילוץ $y_\mathrm{i}\geq 0$.

באופן דומה לסעיף א, מספר הפתרונות למשוואה זו: $\binom{(n-r)+r-1}{r-1}=\binom{\mathrm{n}-1}{\mathrm{r}-1}$.

ב. עלינו לפתור עבור כל r אפשרי ולסכום. עבור r מסוים, כפי שראינו בסעיף א יש $\binom{n+r-1}{r-1}$ פתרונות אפשריים. נסכום עבור כל r: $\sum_{r=1}^{\mathrm{n}}\binom{n+r-1}{r-1}$. זהו בעצם סכום אלכסון במשולש פסקל: $\binom{\mathrm{n}}{0}+\binom{\mathrm{n}+1}{1}+\binom{\mathrm{n}+2}{2}+\binom{\mathrm{n}+3}{3}+\cdots+\binom{2\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}-1}$, סכום השווה ל - $\binom{2n}{n-1}$, לפי שאלה 3.

מקדמים מולטינומיים

<u>נוסחת המולטינום</u>: נתונים n_1 איברים מסוג 1, n_2 איברים מסוג 2, ... , $\mathrm{n_k}$ איברים מסוג k.

אזי מספר הסידורים שלהם בשורה הוא $\frac{(\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2+\cdots+\mathrm{n_k})!}{\mathrm{n}_1!\mathrm{n}_2!\ldots\mathrm{n_k}!}=\binom{\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2+\cdots+\mathrm{n_k}}{\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\ldots,\mathrm{n_k}}$.

5. נתונים 5 כדורים כחולים, 7 כדורים אדומים, ו - 20 כדורים שחורים.
בכמה דרכים ניתן לסדר אותם בשורה?

פתרון:

נשים לב שיש 5+7+20=32 מקומות בשורה.

נבחר מבין 32 המקומות, מקומות לכדורים השחורים: $\binom{32}{20}$.

נבחר מבין 12 המקומות הנותרים, מקומות לכדורים האדומים: $\binom{12}{7}$.

במקומות הנותרים נמקם את הכדורים הכחולים.

סה"כ ישנן $\binom{32}{20,7,5}=\frac{32!}{20!7!5!}=\frac{32!}{20!12!}\cdot\frac{12!}{7!5!}=\binom{32}{20}\cdot\binom{12}{7}\cdot\binom{5}{5}$ אפשרויות.

6. כמה מילים שונות ניתן להרכיב מהמילה Mississippi, ע"י שימוש בכל האותיות?
וכמה מ- מיסיסיפי?
כמה מילים ניתן להרכיב אם לא מרשים (בעברית) שתי י' ברצף, או (באנגלית) שתי i ברצף?

פתרון:

באנגלית: בעצם השאלה היא כמה מילים בנות 11 אותיות ניתן לרשום מהאותיות {m,i,s,p}, כך ש - m מופיעה בדיוק פעם אחת, i מופיעה 4 פעמים, s מופיעה 4 פעמים ו - p פעמיים.

נציב בנוסחת המולטינום: $\binom{11}{1,4,4,2}$.

בעברית: לפי אותו עיקרון נקבל: $\binom{8}{1,4,2,1}$.

אם לא מרשים שתי i ברצף: נסדר תחילה את שאר האותיות: $\binom{7}{1,4,2}$, כעת ניתן להסתכל על כל אות כמחיצה ועל כל רווח כתא, ועלינו למקם את 4 ה-i-ים ב - 8 תאים, כך שיש לכל היותר i אחד בתא; מספר האפשרויות לכך הוא: $\binom{8}{4}$, ולכן בסה"כ יש $\binom{8}{4}\cdot\binom{7}{1,4,2}$ מילים.

בעברית באותה צורה: $\binom{5}{4}\cdot\binom{4}{1,2,1}$ מילים.

7. מהו המקדם של x^5 בפולינום $(x^5+7x^3+4x^2+1)^3$?

פתרון:

נרשום תחילה את שלוש הסוגריים אחת ליד השניה, ונחשב את כל האפשרויות השונות:

על מנת לקבל חזקה 5, אפשרות אחת היא לבחור פעם אחת את x^5 ועוד פעמיים ב – 1, ומספר האפשרויות לכך הוא $3=\binom{3}{1,2}=\binom{3}{1,0,0,2}$. כל מחובר כזה תורם $1=1\cdot1^2$ למקדם, ובסה"כ: 3.

אפשרות שניה היא לבחור פעם אחת ב - $7x^3$ פעם אחת ב - $4x^2$ ופעם אחת ב - 1, ומספר האפשרויות לכך הוא $6=\binom{3}{1,1,1}=\binom{3}{0,1,1,1}$. כל מחובר כזה תורם $28=7\cdot4\cdot1$ למקדם, ובסה"כ: $168=6\cdot28$.

לכן בסה"כ יהיה המקדם: $171=3+168$.

מספרי קטלן

<u>הגדרה</u>: סדרת n אפסים ו – n אחדים נקראת מאוזנת, אם בכל רישא שלה מספר האפסים הוא לפחות כמספר האחדים.

<u>משפט</u>: מספר הסדרות המאוזנות שכוללות n אפסים ו - n אחדים הוא $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. זהו מספר קטלן ה – n.

8. הוכחה גיאומטרית למשפט:

נתבונן בסדרת אפסים ואחדים כסדרת מהלכים סריגיים על המישור: כל 0 הוא צעד ימינה, וכל 1 הוא צעד למעלה. לדוג' הסדרה (0,1,1,0,1) היא סדרת המהלכים: ימינה, למעלה, למעלה, ימינה, למעלה. בתום סדרת מהלכים זו נגיע לנקודה (2,3).

כעת נוכל לתרגם את הבעיה של מניית מספר הסדרות המאוזנות ב-n אפסים ו-n אחדים, לבעיה הבאה: מהו מספר סדרות המהלכים הסריגיים מהנקודה (0,0) לנקודה (n,n) שאינן חוצות את הישר x=y כלפי מעלה, כלומר שבכל סדרת המהלכים מתקיים $x\geq y\geq 0$?

נשים לב שמותר מצב בו x=y.

תחילה נפשט את ההוכחה ע"י הזזת המהלכים מקום אחד ימינה. כלומר אנו מתבוננים במסלולים היוצאים מהנקודה (1,0) ומסתיימים בנקודה (n+1,n), ושוהים כל הזמן בגזרה $x>y\geq0$ (כלומר לא נרשה x=y).

כעת נגדיר את הקבוצות הבאות:

S = קבוצת כל סדרות המהלכים הסריגיים מ - (1,0) אל (n+1,n), שאינן נוגעות בישר x=y.

A = קבוצת **כל** סדרות המהלכים הסריגיים מ - (1,0) אל (n+1,n).

B = קבוצת כל סדרות המהלכים הסריגיים מ - (1,0) אל (n+1,n), אשר נוגעות בישר x=y (או חוצות אותו).

ברור שנרצה לחשב את |S|, וכן ש- |S|=|A|-|B|.

בנוסף נגדיר: C = קבוצת כל סדרות המהלכים הסריגיים מ - (0,1) אל (n+1,n).

נראה כעת התאמה בין סדרות B לסדרות C.

בהינתן b∈B, נמצא את המקום הראשון בו b נוגע בישר x=y (מקום כזה קיים בהכרח מכך ש - b∈B), ונשקף את קטע המסלול עד לנקודה זו ביחס לישר x=y.

התאמה זו מחליפה סדרת מהלכים מ - (1,0) אל (n+1,n), בסדרת מהלכים מ - (0,1) אל (n+1,n), כלומר בסדרת מהלכים מ - C.

נוכל להגדיר את ההתאמה ההפוכה: בהינתן c∈C, נמצא את המקום הראשון שבו c נוגע בישר x=y (קיים כזה כי c חותך את הישר), ונשקף את קטע המסלול עד לנקודה זו ביחס לישר x=y. נקבל סדרת מהלכים מ - (1,0) אל (n+1,n) הנוגעת בישר x=y, ולכן זוהי סדרת מהלכים מ - B.

קל לוודא שאלו שתי פונקציות הפוכות, ולכן הינן חח"ע ועל. מכך נובע ש - |B|=|C|.

מספר סדרות המהלכים הסריגיים מנקודה (a,b) לנקודה (c,d) הוא $\binom{c-a+d-b}{c-a}$.

לכן $|A| = \binom{2n}{n}$ וכן $|C| = \binom{2n}{n+1}$.

כיוון ש - |B|=|C| מקבלים ש - $|B| = \binom{2n}{n+1}$, ולכן:

$|S| = |A| - |B| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

מש"ל.

9. נתונה תכנית מחשב המקבלת כקלט את סדרת המספרים 1,2,3,4,…,n בסדר הזה בדיוק, ועבור כל איבר בקלט מבצעת פעולת push למחסנית המתפקדת בצורת LIFO.
כמו כן התכנית מבצעת פעולת pop לכל איבר, בשלב כלשהו של התכנית.
סדרת פעולות לגיטימית עבור קלט של 1,2,3 לדוגמא:
Push(1), Push(2), Pop(2), Push(3), Pop(3), Pop(1).
במקרה כזה הפלט הוא: 2,3,1.
כמה סדרות פלט אפשריות עבור קלט של 1,2,3,4,…,n ?

פתרון:

כיוון שהדרישה היא ש - Pop יבוצע רק לאחר פעולת Push, וכיוון שניתן לבצע Pop רק לאיבר הנמצא בראש המחסנית, ניתן להתייחס לפעולת Push(i) ופעולת Pop(i) כזוג סוגריים כאשר Push הוא הפותח ו-Pop הוא הסוגר.

לכן הפיתרון לשאלה זו היא בדיוק פתרון לשאלת סוגריים מאוזנים, כלומר מספר קטלן: $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.