<u>תרגול 3</u>

בחירת k מתוך n איברים:

סדר / חזרות	אין חזרות	יש חזרות
יש חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$

תרגילים:

<u>תרגיל 1:</u> בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו – n כדורים צבעוניים בצבעים שונים ל – $2n$ תאים מובחנים כך שבכל תא:

א) לכל היותר כדור אחד.
ב) לכל היותר כדור לבן אחד.
ג) לכל היותר כדור צבעוני אחד.
ד) מספר שווה של כדורים לבנים וצבעוניים.

<u>*פתרון:*</u>

א) $\frac{(2n)!}{n!}$ - *חלוקת הכדורים הצבעוניים תקבע את חלוקת הכדורים הלבנים (הם יחולקו לתאים שנשארו ריקים). חלוקת* n *הצבעוניים ל –* 2n *התאים כך שלכל היותר כדור אחד בכל תא זו בדיוק בחירת* n *מתוך* 2n *תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרות.*

ב) $\overbrace{(2n)^n}^{\text{צבעוניים}} \cdot \overbrace{\binom{2n}{n}}^{\text{לבנים}}$ - *אין הגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בתא, לכן זו בחירת* n *מתוך* 2n *תאים עם חשיבות לסדר ועם חזרות, כלומר* $(2n)^n$. *עבור הלבנים יש לבחור בדיוק* n *מתוך* 2n *תאים כך שבכל תא יהיה כדור לבן אחד, כלומר* $\binom{2n}{n}$.

ג) $\overbrace{\frac{(2n)!}{n!}}^{\text{צבעוניים}} \cdot \overbrace{\binom{n+2n-1}{2n-1}}^{\text{לבנים}}$ - *חלוקת* n *הצבעוניים ל –* 2n *התאים כך שלכל היותר כדור אחד בכל תא זו בדיוק בחירת* n *מתוך* 2n *תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרות, כלומר* $\frac{(2n)!}{n!}$. *עבור הלבנים הסדר של חלוקתם לתאים לא משנה (כי צבעם זהה), ואין מגבלה לגבי חזרות, כלומר* $\binom{n+2n-1}{2n-1}$.

ד) $(2n)^n$ - *חלוקת הלבנים נקבעת ע"פ הצבעוניים (נצמיד לכל כדור צבעוני כדור לבן).*

<u>תרגיל 2:</u>

<u>סעיף א':</u> בכמה דרכים ניתן לחלק 300 כדורים זהים ל – 3 תאים מובחנים כך שבכל תא יהיו לא יותר מ – 180 כדורים?

<u>סעיף ב':</u> בכמה דרכים ניתן לחלק 300 כדורים זהים ל – 3 תאים מובחנים כך שבכל תא יהיו לא יותר מ – 120 כדורים?

פתרון:

סעיף א':

סך כל הדרכים לחלוקת הכדורים לתאים הוא: $\binom{300+3-1}{3-1}$. *מכיוון שיש רק 300 כדורים, לכל היותר בתא אחד יכולים להיות יותר מ – 180 כדורים (האפשרות הפסולה). 3 דרכים לבחירת תא, ולכן מספר האפשרויות הפסולות הוא:* $3\cdot\binom{(300-181)+3-1}{3-1}$. *סה"כ נקבל כי התשובה היא:* $\binom{300+3-1}{3-1} - 3\cdot\binom{(300-181)+3-1}{3-1}$

סעיף ב':

כעת ישנה אפשרות של חריגה ביותר מתא אחד. בהמשך נראה כיצד פותרים זאת ע"י עקרון ההכלה וההדחה. כעת ניקח גישה שונה: נניח שבכל תא יש מראש 120 כדורים. בכמה דרכים ניתן להוציא מהם 60 כדורים (כך נישאר עם 300 כדורים סה"כ)? שאלה זו שקולה לחלוקה של 60 כדורים ל – 3 תאים, לכן נקבל: $\binom{60+3-1}{3-1}$.

<u>תרגיל 3:</u> הוכיחו את הזהויות הבאות בדרך אלגברית ובדרך קומבינטורית:

א) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

ב) $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}$

פתרון:

א) *ניתן לרשום את הנוסחה כך:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}$$

<u>ההוכחה האלגברית</u>: נתבונן על הזהות $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$. *לכל מספר טבעי* r *כך ש-* $0\le r\le 2n$ *, המקדם של* x^r *במכפלת שני הפולינומים באגף שמאל שווה למקדם של* x^r *בפולינום באגף ימין. בפרט זה נכון כאשר* $r=n$. *מנוסחת הבינום של ניוטון נובע שהזהות בין בפולינומים שרשומה למעלה שקולה ל-*

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]=$$

$$\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}$$

כאשר נפתח סוגריים באגף שמאל ונשווה את המקדמים של x^n*, נקבל את הזהות הדרושה.*

<u>הוכחה קומבינטורית</u>: כעת נבחן את אגף ימין: יש לבחור n איברים מתוך 2n. נחלק את 2n האיברים לשתי קבוצות זרות של n איברים. אז זה שקול לבחירה של מספר x כלשהו של איברים מקבוצה אחת ו – n-x מהקבוצה השנייה, כאשר x נע בטווח [0,n]. כל האפשרויות האלה מיוצגות ע"י אגף שמאל ומכאן נכונות הנוסחה.

ב) *<u>הוכחה אלגברית</u>: נתון מספר טבעי m, נוכיח את הזהות באינדוקציה על n. כאשר* $n=0$ *נקבל את המשוואה* $\binom{m}{0}=\binom{m+1}{0}$*, והיא נכונה כי הביטויים בשני האגפים שווים ל- 1.*
נניח כעת שהזהות מתקיימת עבור n ונוכיח עבור $n+1$*:*

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n+1}+\binom{m+n+1}{n}$$

$$=\binom{m+n+2}{n+1}$$

כאן השתמשנו בהנחת האינדוקציה ואחר כך בזהות פסקל. זה מסיים את האינדוקציה.

<u>הוכחה</u> <u>קומבינטורית:</u> נניח שיש לנו $m+1$ אפסים ו – n אחדות לסדר בשורה. אגף ימין זו הנוסחה הישירה לחישוב זה. נבחן את אגף שמאל: נבודד ספרת 0 אחת שתהיה הסמן הימני, כלומר בכל בחירה נסתכל על ה – 0 הימני ביותר. ישנן $n+1$ אפשרויות למספר האחדות שמשמאל לסמן הימני הזה. מ – 0 ועד n (זו הסכימה באגף שמאל). למשל בדוגמא: 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 יש 2 אחדות משמאל לסמן הימני מסך 6 האחדות. ברגע שקבענו כמה אחדות משמאל לסמן הימני, נאמר k, נותר לקבוע את מיקומן – לקבוע סידור של k אחדות ו – m אפסים בשורה, כלומר $\binom{m+k}{k}$. מכאן שהנוסחה באגף שמאל מחשבת את אותו מספר הסידורים.

<u>תרגיל 4:</u> בכמה מהמספרים בעלי 7 ספרות, כל ספרה המופיעה במספר מופיעה לפחות 3 פעמים?

<u>פתרון:</u>

נבחין בין שני סוגי מספרים העונים על הדרישה:

סוג א': מספר המורכב מספרה אחת. ישנם 9 מספרים כאלה.

סוג ב': מספר המורכב משתי ספרות:

1. *מספר המורכב משתי ספרות שאינן 0. ראשית נבחר את שתי הספרות: $\binom{9}{2}$. כעת יש שתי אפשרויות למספר המופעים של ספרה: 3 או 4, כיוון ששתיהן חייבות להופיע לפחות 3 פעמים, וזה קובע את מספר המופעים של הספרה האחרת. למשל ב – 4433344 לספרה 4 ארבעה מופעים ולספרה 3 שלושה מופעים. ברור כי ישנן $\binom{7}{4}$ אפשרויות לקבוע את מיקום הספרות.*
2. *מספר המורכב משתי ספרות כשאחת מהן היא 0. אז יש 9 אפשרויות לבחור את הספרה השנייה. כעת, הספרה השמאלית ביותר לא יכולה להיות 0. נותר לקבוע את מיקומה בין ששת המקומות הנותרים: אם 0 מופיעה 3 פעמים נקבל $\binom{6}{3}$, ואם 0 מופיעה 4 פעמים נקבל $\binom{6}{4}$.*

נקבל סה"כ $\binom{9}{2}\cdot 2\cdot\binom{7}{4}+9\cdot\left(\binom{6}{3}+\binom{6}{4}\right)$ דרכים לבניית מספרים מסוג ב'.

בסה"כ קיבלנו: $9+\binom{9}{2}\cdot 2\cdot\binom{7}{4}+9\cdot\left(\binom{6}{3}+\binom{6}{4}\right)$ מספרים העונים על הדרישה.

<u>תרגיל 5:</u> כמה מלים בנות 9 אותיות ניתן לרשום ע"י $\{a,a,a,b,b,b,c,d,e\}$ ובכמה מהן האותיות c,d סמוכות?

<u>פתרון:</u>

אם נתייחס לכל 9 האותיות כשונות, ישנן !9 מלים. אבל כל סידור כלשהו של מופעי a ספרנו כך 6 פעמים ולכן צריך לחלק ב – 6. באותו אופן צריך לחלק ב – 6 עבור b. נקבל סה"כ: $\frac{9!}{6\cdot 6}=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2=10080$.

כעת, אם c,d סמוכות, לסידור ביניהן יש שתי אפשרויות. כעת נתייחס אליהן כספרה אחת ונקבל את הבעיה: כמה מלים בנות 8 אותיות ניתן לרשום ע"י $\{a,a,a,b,b,b,x,e\}$? (כאשר x מסמל את c,d הסמוכות)

בחישוב דומה נקבל כאן $\frac{8!}{6\cdot 6}=8\cdot 7\cdot 5\cdot 4=1120$ ובסה"כ יש $2\cdot 1120=2240$ מלים כנדרש.

<u>תרגיל 6:</u> נתונה קבוצה של $2n$ עצמים, כאשר n מתוכם זהים והשאר שונים זה מזה.

א) מהו מספר הדרכים השונות לבחור n מהעצמים כאשר הסדר אינו חשוב?

ב) מהו מספר הדרכים השונות לבחור n מהעצמים כאשר הסדר <u>כן</u> חשוב?

<u>פתרון:</u>

א) אם בחרנו k מהעצמים השונים אז שאר ה – $(n-k)$ עצמים הם מהעצמים הזהים. לכן נקבל: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

ב) *נסמן ב- k את מספר העצמים השונים בסדרה מאורך n. יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור ב- k המקומות עבור העצמים האלה (ונשים עצמים זהים בשאר המקומות). נתונים k המקומות האלה, יש n אפשרויות עבור האיבר במקום הראשון מבין k המקומות האלה, יש $n-1$ אפשרויות עבור האיבר במקום השני, וכולי. לכן עבור כל ערך נתון של k, מספר הסדרות שבהן יש k עצמים מקבוצת העצמים השונים הוא*

$$\binom{n}{k}n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)=\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}$$

לכן התשובה היא

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}$$

תרגיל 7: בכמה דרכים ניתן להגיע מראשית הצירים לנקודה (m,n) ברביע הראשון, כאשר בכל שלב ניתן להתקדם צעד אחד מזרחה או צעד אחד צפונה?

פתרון:

כל דרך כזו כוללת בהכרח בדיוק m צעדים מזרחה ו – n צעדים צפונה. לכן נותר לקבוע את מיקומי m הצעדים מזרחה בסדרת $m+n$ הצעדים. מכאן נקבל: $\binom{m+n}{m}$ דרכים אפשריות.

תרגיל 8:

א) חשבו את מספר המחלקים של 980,000.
ב) חשבו את מספר המחלקים המשותפים של 15^5 ו – 360,000.

פתרון:

א) *נפרק את המספר לגורמים ראשוניים ונקבל את המולטי-קבוצה: $\{2,2,2,2,2,5,5,5,5,7,7\}$. כעת כל מחלק אפשרי הוא איזושהי כפולה של איברים מהקבוצה (ואלה כל המחלקים האפשריים), ונקבל: $6\cdot5\cdot3=90$ מחלקים אפשריים. הסבר: הגורם 2 יכול להופיע בחזקה שבטווח [0,5] ובאופן דומה הגורמים הראשוניים האחרים.*

ב) *הגורמים הראשוניים של 15^5 : $\{3,3,3,3,3,5,5,5,5,5\}$. הגורמים הראשוניים של 360,000 : $\{2,2,2,2,2,2,3,3,5,5,5,5\}$.
החיתוך בין המולטי-קבוצות הוא: $\{3,3,5,5,5,5\}$ ובחישוב דומה ל-א' נקבל $3\cdot5=15$ מחלקים משותפים.*

תרגיל 9: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי בעל q איברים.

א) כמה פולינומים בעלי דרגה n יש מעל $\mathbb{F}$?
ב) כמה פולינומים בעלי דרגה n המתאפסים בנקודה $x=2$ יש מעל $\mathbb{F}$?

פתרון:

א) *יש n+1 חזקות של x בפולינום: $a_0x^0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n$. לכל a_i יש q אפשרויות (איברי השדה) פרט ל - a_n עבורו יש q-1 אפשרויות – 0 אינו אפשרות כי הפולינום מדרגה n. נקבל $q^n\cdot(q-1)$ פולינומים אפשריים.*

ב) *פולינום מהצורה הנ"ל מתאפס בנקודה x=2 אמ"מ ניתן להציגו בצורה: $(x-2)(b_0x^0+b_1x^1+\cdots+b_{n-1}x^{n-1})$ כאשר $b_{n-1}\neq0$. לכן נקבל $q^{n-1}\cdot(q-1)$ פולינומים אפשריים כנדרש.*

<u>תרגיל 10:</u>

א) מה מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל? (שני סידורים זהים אם ניתן להגיע ע"י סיבוב מהאחד לשני)
ב) מה מספר הדרכים לסדר n זוגות נשואים במעגל כך שכל זוג ישב יחד?

<u>פתרון:</u>

א) *שתי דרכים לפתרון:*
1. *נבחר אדם אקראי שישמש ציר (הוא לא נחשב לספירה – הספירה מתחילה ממי שנבחר להיות משמאל לו). כעת נתחיל לסדר את האנשים משמאל לו, עד שנבחר את האדם האחרון שיסגור את המעגל ויהיה מימין לציר. נקבל סה"כ: $(n-1)!$ סידורים.*
2. *יש $n!$ אפשרויות לסדר n אנשים בשורה. אך אם נסגור את השורה למעגל, נקבל שעד-כדי סיבובים יש לכל מעגל n שורות מקור שיוצרות אותו, ולכן נחלק ב – n. נקבל סה"כ: $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ סידורים.*

ב) *לכל זוג נשוי יש 2 סידורים פנימיים אפשריים ((בעל,אישה) או (אישה בעל)), לכן מסעיף א' נקבל: $2^n \cdot (n-1)!$ סידורים.*

<u>תרגיל 11:</u> בכמה דרכים ניתן לבחור 8 קלפים מחבילת קלפים רגילה (52 קלפים) כך ש:

א) בחרנו ארבעה נסיכים?
ב) בחרנו ארבעה נסיכים ולפחות שני אסים?
ג) בחרנו בדיוק נסיך אחד, מלכה אחת, מלך אחד ואס אחד?

<u>פתרון:</u>

א) *נשאר לבחור 4 קלפים מתוך 48, כלומר: $\binom{48}{4}$.*
ב) *נפרק למקרים:*
1. *בחרנו בדיוק 2 אסים: $\binom{4}{2}\binom{44}{2}$.*
2. *בחרנו בדיוק 3 אסים: $\binom{4}{3}\binom{44}{1} = 44$.*
3. *בחרנו 4 אסים: אפשרות 1 (בחרנו כבר 8 קלפים).*

סה"כ נקבל: $\binom{4}{2}\binom{44}{2} + \binom{4}{3}\binom{44}{1} + 1$ דרכים.

ג) *יש 4 אפשרויות לבחור נסיך אחד, 4 עבור מלכה אחת, 4 עבור מלך אחד ו – 4 עבור אס אחד. נשאר לנו לבחור 4 קלפים מתוך 36 (כל הקלפים בטווח [2,10] כאשר יש 4 קלפים מכל דרגה): $4^4 \cdot \binom{36}{4}$.*

<u>תרגיל 12:</u> בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה m כדורים לבנים ו – n כדורים שחורים, כך שלא יהיו שני כדורים שחורים סמוכים?

<u>פתרון:</u>

<u>דרך א'</u>: ראשית, מעקרון שובך היונים ניתן לראות כי אם $n > m+1$ הסידור בלתי אפשרי (יונים = כדורים שחורים, שובכים = רווחים בין כדורים לבנים כולל לפני הראשון ואחרי האחרון).

כעת נגדיר את הרווחים בין הכדורים השחורים כתאים: $n+1$ תאים. אנו צריכים לפזר את m הכדורים הלבנים בין התאים כך שלא יהיו תאים ריקים, פרט (אולי) לתא הראשון והאחרון. ראשית נפזר כדור לבן אחד לכל אחד מהתאים פרט לקיצוניים ונישאר עם $m-(n-1)$ כדורים. כעת אין מגבלה על פיזור שאר הכדורים כיוון שסיפקנו את האילוץ הנתון. אז נותרנו עם הבעיה: כמה פתרונות טבעיים למשוואה:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = m-(n-1)\ ?$$

אנו כבר יודעים לפתור זאת (נוסחת "אין חשיבות לסדר, יש חזרות"). נקבל:

$$\binom{(n+1)+(m-(n-1))-1}{(n+1)-1} = \binom{m+1}{n}.$$

<u>דרך ב'</u>: הפעם מגדיר את הרווחים בין הכדורים <u>הלבנים</u> כתאים: $m+1$ התאים. אנחנו צריכים לפזר את n הכדורים השחורים בין התאים כך שלא יהיה יותר מכדור שחור אחד בכל תא. זאת אומרת שיש לבחור ב- n תאים מתוך $m+1$ התאים שבהם יהיה כדור שחור, ומספר הדרכים לעשות זאת הוא $\binom{m+1}{n}$.

<u>תרגיל 13:</u> שיכור מטייל על ציר המספרים כאשר בכל שלב הוא עובר מנקודה k לאחת משתי הנקודות $k+1$ או $k-1$.

א) מהו מספר המסלולים האפשריים ב – n שלבים?
ב) כמה מתוכם יחזירו אותו לנקודת ההתחלה?
ג) חזרו על שני הסעיפים הקודמים כאשר השיכור מטייל על המישור, ובכל שלב עובר לאחת מארבעת הנקודות הסמוכות.

<u>פתרון:</u>

א) בכל שלב יש שתי אפשרויות, לכן יש 2^n מסלולים.

ב) n בהכרח זוגי, ויש $\frac{n}{2}$ שלבים מכל סוג. נשאר לקבוע את מיקומי המעברים מסוג אחד בסדרת n השלבים, כלומר $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות.

ג) בסעיף א' נקבל 4^n מסלולים.

עבור סעיף ב': כל צעד מזרחה מחייב צעד חזרה מערבה (במקום כלשהו בסדרת הצעדים), וכל צעד צפונה מחייב צעד חזרה דרומה. נבחר ראשית את מספר הצעדים מזרחה: בין 0 ל - $\frac{n}{2}$. אם מספר הצעדים מזרחה נבחר להיות x, אז נשארו n-2x עבור צעדים צפונה ודרומה. כמו-כן צריך לקבוע את מיקום הצעדים מארבעת הסוגים. לכן נקבל:

$$\sum_{i=0}^{n/2}\binom{n}{i}\binom{n-i}{i}\binom{n-2i}{(n-2i)/2}$$

<u>הסבר:</u>

לאחר שבחרנו כמה צעדים יש מזרחה – i – נבחר את מיקומם: $\binom{n}{i}$.

מתוך המקומות הנותרים נבחר את מיקום i הצעדים המשלימים מערבה: $\binom{n-i}{i}$.

מתוך המקומות הנותרים נבחר את מיקום (n-2i)/2 הצעדים צפונה: $\binom{n-2i}{(n-2i)/2}$.

המקומות הנותרים הם בהכרח מיקומי הצעדים המשלימים דרומה.

<u>פתרון נוסף לסעיף זה (עבור חלק ב'):</u>

כמובן n בהכרח זוגי כמו בטיולים בציר שחוזרים לנקודת ההתחלה. תהי A קבוצת הצעדים שבהם השיכור זז צפונה או מזרחה. אז $|A|=n/2$ ולכן יש $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות עבור הקבוצה A (כקבוצה של n/2 מיקומים בסדרה באורך n). עכשיו תהי B קבוצת הצעדים שבהם השיכור זז צפונה או מערבה. אז גם $|B|=n/2$ ולכן יש $\binom{n}{n/2}$ אפשרויות עבור הקבוצה B. הבחירות של A ו- B בלתי-תלויות לחלוטין, לכן יש $\binom{n}{n/2}^2$ דרכים לבחור בשתי הקבוצות האלה. אבל A ו- B ביחד קובעות את המסלול:

השיכור זז צפונה במיקומים $A\cap B$, מזרחה במיקומים $A\setminus B$, מערבה במיקומים $B\setminus A$, ודרומה בשאר המיקומים. לכן התשובה היא $\binom{n}{n/2}^2$.