<u>תרגול 2</u>

עקרון הסכום:

אם A ו – B קבוצות זרות מעוצמה סופית, אז $|A \cup B| = |A| + |B|$.

אם $A_1, \dots, A_n$ זרות בזוגות בעלי עוצמה סופית, אז $|\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i|$.

עקרון הכפל: (לקבוצות מעוצמה סופית)

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

תרגילים:

<u>תרגיל 1:</u> בכמה דרכים ניתן לבחור נציג יחיד לועדת קישוט מבין כיתות ה'1 ו – ה'2, אם ב – ה'1 20 תלמידים וב – ה'2 30 תלמידים? בכמה דרכים ניתן לבחור שני נציגים – אחד מ – ה'1 ואחד מ – ה'2?

<u>פתרון:</u>

ע"פ עקרון הסכום, ישנן $50 = 30 + 20$ דרכים לבחור נציג משתי הכיתות.

ע"פ עקרון הכפל, ישנן $600 = 30 \cdot 20$ דרכים לבחור נציג אחד מ – ה'1 ונציג אחד מ – ה'2.

<u>תרגיל 2:</u> בכיתה ח'3 15 ספורטאים ו – 13 אמנים. בכמה דרכים ניתן לבחור נציג שהוא ספורטאי או אמן?

<u>פתרון (שגוי):</u>

ע"פ עקרון הסכום ישנן $28 = 13 + 15$ דרכים לבחור נציג שהוא ספורטאי או אמן.

הטעות כאן היא שיכולה להיות "כפליות בספירה" אם ספרנו את אותו האדם פעמיים – פעם בתור ספורטאי ופעם בתור אמן. **חסר לנו פה מידע:** האם קבוצת הספורטאים וקבוצת האמנים הן זרות? אם-כן, אזי עקרון הסכום תקף והפתרון הנ"ל נכון. אחרת, אנו צריכים לדעת את גודל החיתוך בין הקבוצות. נטפל בשאלות כאלה בהמשך.

כדוגמת קיצון, נניח כי ישנם 15 אנשים סה"כ בכיתה ח'3. אזי ברור כי כולם ספורטאים ו – 13 מהם גם אמנים, כלומר קבוצת הספורטאים מכילה את קבוצת האמנים, ויישנן 15 דרכים לבחור נציג כנדרש.

<u>תרגיל 3:</u> כמה מספרים 4-ספרתיים ניתן להרכיב מהספרות 2,3,4,5 ? כמה ניתן להרכיב כך שהספרה 3 מופיעה ?

<u>פתרון:</u>

קבוצת הספרות שיכולות להיות ספרת האלפים היא $A = \{2,3,4,5\}$. ברור כי זו גם קבוצת הספרות שיכולות להיות ספרת המאות. כנ"ל לגבי העשרות והאחדות. ע"פ עקרון הכפל נקבל כי ניתן להרכיב $256 = 4^4$ מספרים כנדרש.

לגבי החלק השני של השאלה:

<u>ראשית פתרון שגוי:</u>

אם הספרה 3 מופיעה כספרת האלפים, אזי ע"פ עקרון הכפל ישנן $64 = 4^3$ דרכים לבחור את שאר הספרות.

אם הספרה 3 מופיעה כספרת המאות נקבל אותה תוצאה. כנ"ל לגבי 3 כספרת העשרות או האחדות.

כעת, ע"פ עקרון הסכום ישנן $256 = 64 + 64 + 64 + 64$ דרכים להרכיב את המספר כנדרש. נשים לב כי כבר אינטואיטיבית זה לא מסתדר, מפני שעם חופש בחירה מלא יכולנו להרכיב 256 מספרים, כך שנצפה שעם האילוץ החדש, קרי הספרה 3 חייבת להופיע, נוכל להרכיב פחות מספרים.

מה שגוי כאן? שוב יש לנו כפליות בספירה: למשל את המספר 1383 ספרנו פעמיים: פעם בקבוצה בה הספרה 3 היא ספרת המאות ופעם בקבוצה בה הספרה 3 היא ספרת האחדות. לכן קיבלנו מספר אפשרויות גדול משמעותית מהמספר שאכן קיים.

<u>כעת פתרון נכון:</u>

ראשית אבחנה:

$$\{numbers\ made\ of\ A\} =$$
$$\{numbers\ made\ of\ A\ where\ 3\ appears\ at\ least\ once\} \cup$$
$$\{numbers\ made\ of\ A\ where\ 3\ does\ not\ appear\}$$

כיוון שהקבוצות באגף הימני של המשוואה הן זרות, ניתן להחיל עליהן את עקרון הסכום. אזי:

מספר האפשרויות להרכיב מספרים 4-ספרתיים מהספרות 2,4,5 הוא (ע"פ עקרון הכפל): $3^4 = 81$

חישבנו בתחילת התרגיל שסך כל האפשרויות להרכיב מספרים 4-ספרתיים מהספרות 2,3,4,5 הוא 256.

לכן (ע"פ עקרון הסכום) מספר האפשרויות להרכיב מספרים 4-ספרתיים בהם מופיעה הספרה 3 הוא: $256 - 81 = 175$.

<u>תרגיל 4:</u> מה מספר הדרכים לבחור שני מספרים שונים a,b, ללא חשיבות לסדר, מבין: $\{1,2,3,\ldots,50\}$, כך ש $|a-b| \leq 3$?

<u>פתרון:</u>

ישנן 3 אפשרויות להפרש בין המספרים: 1, 2, או 3.

הפרש 1: ישנן 49 אפשרויות: (1,2), (2,3), ..., (49,50).

הפרש 2: ישנן 48 אפשרויות.

הפרש 3: ישנן 47 אפשרויות.

סה"כ: $49 + 48 + 47 = 144$.

<u>תרגיל 5:</u> בכמה דרכים ניתן לחלק 6 אנשים ל – 3 קבוצות, כך שרינה נמצאת עם רוני באותה קבוצה, וגלי לא נמצאת עם גיל באותה קבוצה?

<u>פתרון:</u>

ראשית, את רינה ורוני ניתן לספור ביחד כבן-אדם אחד, כך שפישטנו את הבעיה לנוסח הבא:

בכמה דרכים ניתן לחלק 5 אנשים ל – 3 קבוצות, כך שגלי לא נמצאת עם גיל באותה קבוצה?

כעת שוב ניתן להשתמש בעקרון הסכום: נחשב את סך כל האפשרויות ללא האילוץ, את סך האפשרויות לחלוקה כאשר גלי וגיל יחד באותה הקבוצה, ונחסר את הסכום השני מהראשון כדי לקבל את הנדרש.

<u>האפשרויות ללא האילוץ:</u> מהן החלוקות האפשריות?

חלוקה א': 1 1 3.

חלוקה ב': 1 2 2.

נחשב:

חלוקה א':

ראשית נבחין כי לבחור 3 אנשים מתוך 5 זה כמו לבחור את השניים הנותרים.

ניתן לבחור בצורה הבאה: ישנן 5 אפשרויות לבחור את הבן-אדם הראשון, ו – 4 את השני. אבל כך אנו בוחרים עם סידור שלהם, אך הסדר לא משנה – רק הגדרת שני היחידונים. ולכן מספר אפשרויות זה צריך לחלק ב – 2, כי זה מספר האפשרויות לבחור סדר ביניהם. נסיק כי יש $10 = \frac{5\cdot4}{2}$ אפשרויות לבחור 3 אנשים מתוך 5.

חלוקה ב':

חישבנו כבר כי יש 10 אפשרויות לבחור 2 אנשים מתוך 5. זה מגדיר זוג אחד. כעת נשאר לבחור את הזוג השני, או באופן שקול את היחידון הנותר, כלומר 3 אפשרויות. נותר לחלק ב – 2 כיוון שלא משנה סדר בחירת הזוגות. נקבל $15 = \frac{10\cdot3}{2}$ אפשרויות לחלוקה זו.

סך כל האפשרויות לחלוקה ללא האילוץ הוא $10 + 15 = 25$.

בצורה דומה נחשב את סך האפשרויות לחלוקה כאשר גלי וגיל יחד באותה הקבוצה ונקבל שהוא: 6.

לכן סך כל האפשרויות הנדרש הוא: $25 - 6 = 19$.

<u>תרגיל 6:</u> (אם נשאר זמן בסוף השעה הראשונה)

<u>סעיף א':</u> כמה עצים (גרף קשיר חסר מעגלים) שונים עד-כדי איזומורפיזם ניתן לבנות מ – 4 קודקודים? מ – 5?

<u>סעיף ב':</u> כמה יערות (יער הוא גרף שכל רכיב קשירות בו הוא עץ) ניתן לבנות בעלי 21 עצים עם 4 קודקודים ו – 15 עצים עם 5 קודקודים?

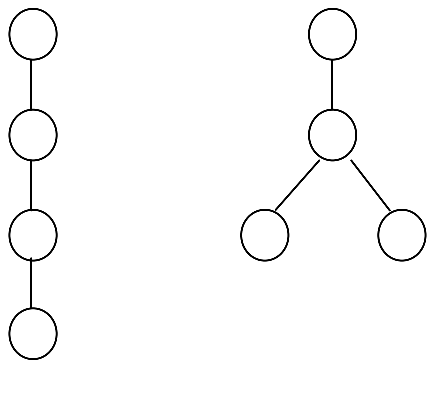
<u>סעיף ג':</u> כמה יערות (לא ריקים) ניתן לבנות בעלי לכל היותר 10 עצים, מעצים בעלי 4 ו – 5 קודקודים, בהם מספר העצים בני 5 קודקודים הוא כפול ממספר העצים בעלי 4 קודקודים?

<u>הערה:</u> בתרגיל זה לכל עץ ביער שם משלו, כלומר עץ ששמו Ti בעל חמישה קודקודים שמופיע בשתי תצורות שונות, מגדיר שני יערות שונים. אם שני עצים A ו – B בעלי 5 קודקודים כל אחד מגדירים יער, וישנן x אפשרויות לבנות עץ בן 5 קודקודים, אז ישנן x^2 אפשרויות להגדיר את היער, מה <u>שמשתנה</u> אם אנו לא מקצים שמות לעצים (כי אז תהיינה כפילויות בתצורות היער, בדומה לתרגיל 2).

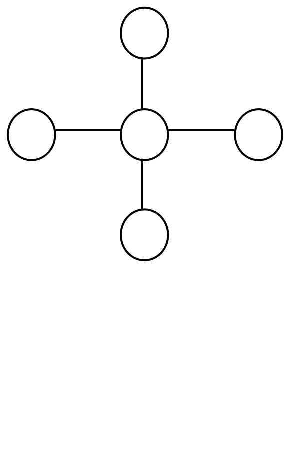
<u>פתרון:</u>

<u>סעיף א':</u>

ישנם שני עצים שונים בני 4 קודקודים:



ישנם שלושה עצים שונים בני 5 קודקודים:



<u>סעיף ב':</u> לפי ההערה לכל עץ ביער שם משלו. עבור כל עץ עם 4 קודקודים ישנן שתי תצורות אפשריות, ועבור כל עץ עם 5 קודקודים ישנן שלוש תצורות אפשריות. ע"פ עקרון הכפל נקבל: $2^{21} \cdot 3^{15}$ יערות אפשריים.

<u>סעיף ג':</u>

עבור החלק האחרון בשאלה ישנן 3 אפשרויות:

1. עץ-4 אחד ושני עצי-5: $2^1 \cdot 3^2$ אפשרויות.
2. שני עצי-4 וארבעה עצי-5: $2^2 \cdot 3^4$ אפשרויות.
3. שלושה עצי-4 ושישה עצי-5: $2^3 \cdot 3^6$ אפשרויות.

סה"כ נקבל: $2^1 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^4 + 2^3 \cdot 3^6$ אפשרויות.

עקרון שובך היונים:

אם $|B| > |A|$ אז אין פונקציה חח"ע $f: A \to B$.

בניסוח אחר, אינטואיטיבי מה: אם נחלק 101 יונים ל – 100 שובכים, יהיה לפחות שובך אחד שיכיל שתי יונים או יותר.

בהכללה: אם נחלק x יונים ל – y שובכים, אז יהיה לפחות שובך אחד שיכיל $\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$ יונים או יותר.

ניסוח שקול: אם הממוצע של n מספרים הוא x, אז לפחות אחד המספרים שווה ל-x או גדול ממנו.

<u>תרגיל 7:</u>

הוכיחו כי בין כל שישה מספרים שלמים תמיד נוכל למצוא שני מספרים שההפרש ביניהם יתחלק ב – 5 ללא שארית.

האם הטענה תישאר נכונה עבור סכום?

<u>פתרון:</u>

נסמן כתאים את השאריות האפשריות בחלוקת מספר ב – 5:

0	1	2	3	4

נחלק את ששת המספרים בין התאים. ע"פ עקרון שובך היונים יהיה תא בו שני מספרים לפחות, כלומר שארית החלוקה שלהם ב – 5 זהה. מכאן שההפרש ביניהם מתחלק ב – 5 ללא שארית.

הטענה לא נכונה עבור סכום של שני מספרים. למשל אם שארית החלוקה של כל אחד משׁשת המספרים ב – 5 היא 1, אזי שארית החלוקה של סכום כל שניים מהם ב – 5 היא 2.

<u>תרגיל 8:</u>

הוכיחו שקיים מספר, שניתן לרשום רק ע"י הספרות 7 ו - 0, שמתחלק בלי שארית ב-359.

<u>פתרון:</u>

נסתכל על המספרים: 7, 77, 777, ..., $\overbrace{77\ldots\ldots77}^{\text{360 ספרות}}$. ע"פ הוכחה דומה לתרגיל 7, אנו יודעים כי ישנם שניים מהם שההפרש ביניהם מתחלק ב – 359 ללא שארית. והרי ההפרש הזה הוא מספר שמורכב רק מהספרות 7 ו – 0, כנדרש.

<u>תרגיל 9:</u>

בוחרים n+1 מספרים שונים מבין 1,2,…,2n. צריך להוכיח כי ישנם שניים מהם הזרים זה לזה.

<u>פתרון:</u>

נגדיר בעזרת המספרים 1,2,…,2n, n תאים בצורה הבאה:

1,2	3,4	....	2n-1,2n

כיוון שבוחרים מביניהם n+1 מספרים, ע"פ עקרון שובך היונים קיים תא ששני המספרים שלו נבחרו. אלה הם מספרים עוקבים, ולכן זרים, כלומר המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1 (הסבר בהמשך).

נשים לב שקיים פה אילוץ בבחירת n+1 המספרים: בכל תא ייבחרו לכל היותר שני מספרים, אך זה לא "מפריע" לעקרון שובך היונים.

בניסוח אחר: כל פונקציה מ – $\{1,2,\ldots,n+1\}$ ל - $\{1,2,\ldots,n\}$ אינה חח"ע, בפרט קבוצת הפונקציות עם האילוץ הנ"ל.

מדוע שני מספרים עוקבים הם זרים?

הסבר: יהיו המספרים הללו $t, t+1$. נניח ש – d מחלק משותף שלהם. אזי קיימים a, b שלמים כך ש – $t = da, t+1 = db$. נקבל כי $1 = d(b-a)$, וכיוון ש – d, a, b שלמים, בהכרח $d = 1$.

<u>תרגיל 10:</u>

נתון מחומש ABCDE במישור שקודקודיו הם נקודות סריג (קואורדינאטות בעלי ערך שלם). הוכיחו כי קיימות שתי נקודות של המחומש שנקודת האמצע ביניהן גם היא נקודת סריג.

<u>פתרון:</u>

נסווג את קודקודי המחומש ע"פ זוגיות הקואורדינאטות שלהם. נייצג זאת ע"י זוגות סדורים:

(זוגי, זוגי), (זוגי, אי-זוגי), (אי-זוגי, זוגי), (אי-זוגי, אי-זוגי).

ע"פ עקרון שובך היונים ישנן שתי נקודות של המחומש עם אותו סיווג. לכן הסכום בין הקואורדינאטות המתאימות יהיה זוגי, ולכן נקודת האמצע תהיה בעלת קואורדינאטות שלמות.

<u>תרגיל 11:</u>

לפוליטיקאי נותרו 50 ימים לנאום עד הבחירות. כל יום הוא ינאם לפחות נאום אחד, אך לא יותר מ – 75 נאומים סה"כ. הוכיחו כי ישנה סדרת ימים בהם הוא נואם בסה"כ 24 נאומים.

<u>פתרון:</u>

נסמן ב - x_i את מספר הנאומים שנאם הפוליטיקאי עד היום ה – i כולל. מתקיים כי:

$$1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{50} \leq 75$$

נתבונן ב – 100 המספרים:

$$x_1, x_2, \dots, x_{50}, x_1 + 24, x_2 + 24, \dots, x_{50} + 24$$

כולם נמצאים בין 1 ל – 99. ע"פ עקרון שובך היונים שניים מהם שווים. אלה הם בהכרח שני מספרים

$$x_i, x_j + 24$$

המקיימים:

$$1 \leq j \leq i \leq 50$$

לכן מהיום ה – j+1 עד היום ה – i כולל, נאם הפוליטיקאי 24 נאומים סה"כ.

<u>תרגיל 12:</u> (טענה מתורת המספרים)

בהינתן p,q טבעיים זרים זה לזה ו – a שלם כלשהו, הראו כי הקבוצה:

$$\{a, a+q, a+2q, \dots, a+(p-1)q\}$$

היא מערכת שאריות שלמה מודולו p, כלומר קבוצת השאריות של חלוקת מספרים אלה ב – p תניב את קבוצת כל השאריות האפשריות בחלוקה ב – p.

<u>הסיקו כי:</u> בהינתן p,q טבעיים זרים זה לזה ו – a,b שלמים כלשהם, קיים x שלם כך שמתקיים:

$$x \equiv a \ (mod\ q) \quad , \quad x \equiv b \ (mod\ p)$$

<u>הערה:</u> המסקנה ידועה כמשפט השאריות הסיני.

<u>פתרון:</u>

נניח בשלילה כי הקבוצה הנ"ל אינה מערכת שאריות שלמה מודולו p. אזי ע"פ עקרון שובך היונים קיימים בקבוצה שני איברים $a + kq, a + lq$ כאשר $0 \leq k < l < p$, כך שלשני איברים אלה אותה שארית בחלוקה ב – p. אבל אז $(a + lq) - (a + kq) = (l - k)q$ מתחלק ב - p. מכיוון ש – p,q זרים, בהכרח $(l - k)$ מתחלק ב – p, והרי $0 < (l - k) < p$, סתירה.

<u>הוכחת המסקנה:</u>

ע"פ מה שהוכחנו כרגע, קיים $0 \leq k < p$ המקיים: $a + kq \equiv b \ (mod\ p)$, וברור כי $a + kq \equiv a \ (mod\ q)$.