תרגול 14

שאלה 1

נגדיר את M בתור אוסף כל המחרוזות $\{0,1\}^k$ (מחרוזות באורך k המורכבות מהתווים 0 ו- 1). בוחרים בהתפלגות אחידה מחרוזת מ- M. כמה אחדות בממוצע יש במחרוזת?

תשובה

גודל מרחב המדגם שלנו הוא 2^k, וההתפלגות היא אחידה, כלומר ההסתברות לבחור בכל מחרוזת היא בדיוק $1/2^k$. נציג 2 דרכים אפשריות לפתור את הבעיה:

א. לכל ספרה נגדיר מאורע A_i בתור "הספרה היא 1". f_i יהיה משתנה אינדיקטור ל- A_i. מהו $pr(A_i)$? נתבונן בספרה ה- i של מחרוזות מרחב המדגם; עבור כל מחרוזת ב-M שבה הספרה היא 1, קיימת מחרוזת אחרת זהה לה בכל יתר הספרות, ובה הספרה ה-i היא 0. משיקול סימטריה נובע שבדיוק בחצי מהמחרוזות הספרה היא 1, ומכיוון שההתפלגות הינה אחידה $pr(A_i)=1/2$ עבור כל $0<i=<k$. אנו מתעניינים במס' האחדות הממוצע – מלינאריות התוחלת נובע שגודל זה שווה לסכום תוחלות משתני האינדיקטור. כיוון ש- $E(f_i) = pr(A_i)=1/2$, מתקבל שמס' האחדות הממוצע הוא k/2.

ב. נחלק את המחרוזות לקבוצות לפי מס' האחדות שיש בהן. בקבוצה שבה יש t מופעים של 1, יש $\binom{k}{t}$ מחרוזות אפשריות, כלומר ההסתברות לבחור מחרוזת כזו היא $\binom{k}{t}\Big/2^k$ כעת נחשב תוחלת של מ"מ המתאים לכל מחרוזת את מספר האחדות שבה, התוחלת של משתנה מקרי זה תתאר את ממוצע מספר האחדות:

$$.E[f] = \sum_{x\in M} pr(x)f(x) = \sum_{i=0}^{k}\frac{\binom{k}{i}}{2^k}i = \frac{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}i}{2^k}$$

נחשב את ערך המונה – מפונקציות יוצרות:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}ix^i = x\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}ix^{i-1} = x\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}x^i\right)dx = x\left(\left(1+x\right)^k-1\right)dx = xk\left(1+x\right)^{k-1}$$

אם נציב $x=1$ נקבל שערך ביטוי זה הוא $k2^{k-1}$, כלומר נקבל ש- $.E[f] = \frac{k2^{k-1}}{2^k} = \frac{k}{2}$

שאלה 2

$M = \{s_1s_2\dots s_k : s_i \in \{0,1,\dots,i\}\} \subset \{0,1,\dots k\}^k$ בוחרים בהתפלגות אחידה מחרוזת מ- M. מה התוחלת של סכום ספרות המחרוזת הנבחרת?

תשובה

נגדיר את f כמ"מ המתאים לכל מחרוזת במרחב המדגם את סכום הספרות שלה. מליניאריות התוחלת, E(f) שווה לסכום תוחלות מ"מ-ים $f_1,\dots,f_k$, כאשר f_i מתאים למחרוזת את ערך הספרה ה-i שלה. ניתן לראות שבהינתן מחרוזת אקראית s ואינדקס i ניתן למצוא i מחרוזות אחרות ב- M אשר זהות ל-s מלבד ב- s_i, וכל אחת מהמחרוזות הללו מקבלת ערך אחר ב-i. משיקולי סימטריה ההסתברות של הספרה ה - i לקבל ערך $0 \le t \le i$ היא 1/(i+1) לכל ערך t, כלומר $E(f_i)=\sum_{t=1}^{i}\frac{1}{i+1}t=\frac{(i+1)i}{2(i+1)}=\frac{i}{2}$. נחשב את E(f):

$$E(f)=\sum_{i=1}^{k}E(f_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{2}=\frac{k(k+1)}{4}.$$

שאלה 3

מבצעים את הניסוי הבא:

שלב א': מטילים קוביה הוגנת עם 3 פאות המסומנות ב- 1,2 ו-3. נסמן ב –f מ"מ המתאר את תוצאת ההטלה.

שלב ב': מטילים מטבע הוגן מס' פעמים השווה לתוצאת ההטלה בשלב א'. נסמן ב- g מ"מ המתאר את מספר הפעמים שיצא בהם עץ בהטלה.

1. מהי תוחלת f+g?
2. מהי תוחלת f*g?

תשובה

המ"מ-ים הם בברור תלויים, שכן תוצאת הראשון קובעת את מספר הטלות המטבע בשני. אולם מלינאריות התוחלת די לחשב בנפרד את התוחלת של כל אחד מהמ"מים כדי לקבל את תוחלת הסכום.

E(f) הוא קל לחישוב: E(f)=1/3*1 + 1/3*2 + 1/3*3 = 2. נותר אם כן לחשב את E(g). נסמן ב- A_i את המאורע "בהטלה ה-i יצא עץ". בעבור שלמות ההגדרה, נאמר ש- A_i לא מתקיים אם לא הוטלה מטבע בפעם ה-i. נסמן ב- g_i משתנה אינדיקאטור בעבור A_i. ידוע ש- $E(g_i) = pr(A_i)$, ותוחלת g שווה לסכום תוחלות ה- g_i-ים, כלומר נשאר לחשב מהו $pr(A_i)$ עבור כל i. אזי כדי שתוטל המטבע צריך תוצאה של לפחות i בקובייה, ואז בהסתברות 1/2 ייצא עץ. כלומר $pr(A_i)=\frac{4-i}{3}\cdot\frac{1}{2}$. כלומר $E(g) = E(g_1) + E(g_2) + E(g_3) = 3/6 + 2/6 + 1/6 = 1$. סה"כ נקבל ש- E(f+g) = 3.

פתרון ישיר:

נתבונן במרחב הסתברות $(\Omega, \Pr)$ הבא:

$\Omega = \{\big(1, \text{עץ}\big), \big(1, \text{פלי}\big), \big(2, \text{עץ}, \text{פלי}\big), \big(2, \text{פלי}, \text{פלי}\big)\big(2, \text{פלי}, \text{עץ}\big), \big(2, \text{עץ}, \text{עץ}\big),$

$\big(3, \text{פלי}, \text{פלי}, \text{עץ}\big), \big(3, \text{פלי}, \text{עץ}, \text{עץ}\big), \big(3, \text{פלי}, \text{עץ}, \text{פלי}\big), \big(3, \text{עץ}, \text{פלי}, \text{עץ}\big)$

$\big(3, \text{עץ}, \text{עץ}, \text{פלי}\big), \big(3, \text{עץ}, \text{פלי}, \text{פלי}\big), \big(3, \text{עץ}, \text{עץ}, \text{עץ}\big), \big(3, \text{פלי}, \text{פלי}, \text{פלי}\big)\}$

נשים לי כי ההסתברות לאיברים במרחב המדגם אינה אחידה: ההסתברות לכ"א מהשניים הראשונים – $\frac{1}{6}$, ההסתברות לכ"א מהארבעה הבאים – $\frac{1}{12}$, ההסתברות לכ"א משמונת הבאים – $\frac{1}{24}$.

כעת, נחשב למשל את $\Pr(A_2)$ עפ"י ההסתברויות למאורעות הבסיסיים שבמאורע A_2,

$\Pr(A_2) = 2 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

במקרה של המכפלה מצבנו פחות טוב – אנחנו צריכים לחשב את פונקציית ההתפלגות המשותפת של שני האיברים בכדי לחשב את $E(fg) = \sum_{a,b\in R} (a*b)pr(f=a, g=b)$:

	f=1	f=2	f=3
g=0	1/6	1/12	1/24
g=1	1/6	1/6	3/24
g=2	0	1/12	3/24
g=3	0	0	1/24

כלומר נקבל ש-

$$E(fg) = \sum_{a,b\in R} (a*b)pr(f=a, g=b) = \sum_{a\in R}\sum_{b\in R} (a*b)pr(f=a, g=b) =$$

$$\sum_{b\in R}(1*b)pr(f=1, g=b) + \sum_{b\in R}(2*b)pr(f=2, g=b) + \sum_{b\in R}(3*b)pr(f=3, g=b) =$$

$$1\cdot pr(f=1, g=1) + 2\cdot pr(f=2, g=1) + 4\cdot pr(f=2, g=2) + 3\cdot pr(f=3, g=1) + :$$

$$+6\cdot pr(f=3, g=2) + 9\cdot pr(f=3, g=3) =$$

$$\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{12} + 3\cdot\frac{3}{24} + 6\cdot\frac{3}{24} + 9\cdot\frac{1}{24} = \frac{4+8+8+9+18+9}{24} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3}$$

הגדרה:

גרף מקרי G הינו גרף מעל קבוצת הקודקודים {1,2,…,n}, שההסתברות להגריל אותו מבין אוסף הגרפים מעל הקודקודים {1,2,…,n} היא בהתפלגות אחידה, כלומר $\Pr(G) = 2^{-\binom{n}{2}}$.

שאלה 4

הוכח כי בהינתן גרף מקרי עם הרבה קודקודים, ככל הנראה הוא לא דו חלקי.

כלומר: אם נגדיר B=המאורע בו הגרף המוגרל הוא דו חלקי, אז $\lim_{n\to\infty} \Pr(B) = 0$.

הוכחה:

כזכור, גרף דו חלקי G מעל סט הנקודות V, מגדיר בעצם חלוקה של V לשתי קבוצות: W=V \U,U, כך שכל הצלעות בG מחברות בין קודקודים מU לקודקודים מW.

עבור U נתון, נגדיר B_U להיות המאורע בו בגרף המקרי G כל הצלעות מחברות בין קודקוד מU לקודקוד מW. אם נסמן |U|=k, אז יש k(n-k) צלעות אפשריות כאלה, ולכן המאורע B_U מכיל $2^{k(n-k)}$ גרפים, המפולגים בהתפלגות אחידה. לכן $2^{k(n-k)-\binom{n}{2}} = \frac{2^{k(n-k)}}{2^{\binom{n}{2}}} = \Pr(B_U)$.

כעת נתבונן בפונקציה המתאימה ל k(1≤k≤n) את k(n-k). המקסימום של פונקציה זו מתקבל בנקודה בה $k = \frac{n}{2}$, והערך בנקודה זו הוא: $\frac{n^2}{4}$. כלומר ערך הפונקציה בכל נקודה בין 1 ל n הוא קטן/שווה ל$\frac{n^2}{4}$.

קיבלנו: $\Pr(B_U) = 2^{k(n-k)-\binom{n}{2}} \le 2^{\frac{n^2}{4}-\binom{n}{2}} = 2^{\frac{-n(n-2)}{4}}$

נשים כעת לב, כי כל גרף דו חלקי מתאים לאיזה בחירה של $U \subseteq V$, ולכן מתאים לאיזה מאורע B_U. לכן:

$$\Pr(B) = \Pr(\cup_{U\subseteq V} B_U) \le \sum_{U\subseteq V} \Pr(B_U) \le 2^n \cdot 2^{\frac{-n(n-2)}{4}} = 2^{\frac{-n(n-6)}{4}} \to 0$$

תרגילים ממבחנים:

1. יהי $G = (V, E_1)$ גרף עם n קדקודים ולפחות $2n - 1$ צלעות. יהי $T = (V, E_2)$ עץ.

נתון ש $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

הוכיחו שבכל צביעה של צלעות הגרף $(V, E_1 \cup E_2)$ בשלושה צבעים, קיים מעגל שכל צלעותיו באותו צבע.

פתרון:

נבחין ש $|E_1 \cup E_2| \geq 2n - 1 + n - 1 = 3n - 2$

נתייחס לצביעה כלשהי של צלעות הגרף בשלושה צבעים. כעת נחלק את כל צלעות $E_1 \cup E_2$ לשלושה שובכים לפי צבען.

לפי עקרון שובך היונים קיימות n צלעות שצבען זהה והן בהכרח מכילות מעגל כנדרש.

2. n אנשים יושבים בשורה. נסמן בa_n את מספר הדרכים לסדרם מחדש באותם מקומות כך שכל אחד נשאר במקומו או עובר למקום סמוך.
   א. נסחו נוסחת נסיגה עבור a_n.
   ב. נסמן בb_n $(n \geq 2)$ את מספר הדרכים כנ"ל כאשר האנשים יושבים במעגל. בטאו את b_n בעזרת a_n.

פתרון:

א. $a_0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

הסבר: האדם היושב בקצה הימני יכול להישאר במקום ותשארנה a_{n-1} אפשרויות, או לעבור למקום הסמוך.

אם עובר למקום הסמוך האדם שמשמאלו הוא היחיד שיכול לעבור למקום הכי ימני ולכן נשארות a_{n-2} אפשרויות.

ב. נתייחס לאדם ספציפי. אם נשאר במקום, לסידור יתר האנשים יש a_{n-1} אפשרויות.
אם מתחלף עם האדם שמימינו או עם האדם שמשמאלו נותרות a_{n-2} אפשרויות. אפשרי גם שכל אחד יזוז מקום אחד ימינה או מקום אחד שמאלה וסה"כ מקבלים:

$$b_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2$$

שאלה 3:

א. חשבו את הסכום $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} 3^{n-k}$.

ב. בהינתן קבוצה S בגודל n, מעוניינים לחשב את מספר הזוגות (P, T) של תתי קבוצות כך ש – $P \subseteq T \subseteq S$. הציגו את המספר לעיל כסכום. הסבירו.

ג. נתונה המשוואה הבאה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 100$

כמה פתרונות יש למשוואה תחת האילוצים כי $10 \leq x_i \leq 20$ לכל $1 \leq i \leq 7$? נמקו.

פתרו בעזרת פונקציות יוצרות (פתרון בשיטה אחרת **לא** יתקבל).

<u>פתרון:</u>

א. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}3^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}3^{n-k}1^{k}=(3+1)^{n}=4^{n}$

ב. שלושה פתרונות אפשריים:

- נבחר תת קבוצה P בגודל k קטן/שווה ל n, ומבין n-k האיברים הנותרים נעבור אחד אחד ונחליט האם הוא בT או לא:
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}$$
- נבחר *T* בגודל *k* קטן/שווה ל*n*, ומתוכו נבחר *P* בגודל *m* קטן/שווה ל-*k*:
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$$
- כל איבר בקבוצה צריך להחליט האם הוא בקבוצה S, בקבוצות S וגם T או באף אחת מהן. 3 אפשרויות ולכן סך הקבוצות הוא 3^{n}.

ג. תחילה נחלק 10 לכל x_i. כלומר נגדיר: $x_i'=x_i+10$,

ונשאר לפתור את המשוואה: $x'_1+x'_2+x'_3+x'_4+x'_5+x'_6+x'_7=30$,

כאשר $0\le x_i'\le 10$ לכל i.

הפונקציה היוצרת לכל x_i' היא : $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$.

נכפול את כל הפונקציות היוצרות (יש 7 פונקציות יוצרות כאלה, אחת עבור כל i), ונחפש את המקדם של x^{30}.

שימו לב ש: $\frac{1-x^{11}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$, לכן הכפלה של פונקציה יוצרת זו בעצמה 7 פעמים היא: $\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^7$.

נפתח מונה ומכנה בנפרד: (נתעלם ממחוברים בהם חזקת x גדולה מ-30)

$$(1-x^{11})^7=\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(-x^{11})^k=\binom{7}{0}\cdot 1-\binom{7}{1}x^{11}+\binom{7}{2}x^{22}-\cdots=1-7x^{11}+21x^{22}-\cdots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^7=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+7-1}{7-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+6}{6}x^n$$

נכפיל את הפונקציות היוצרות ונחפש את המקדם של x^{30}.

המקדם של x^{30} הוא: $1\cdot\binom{30+6}{6}-7\cdot\binom{19+6}{6}+21\cdot\binom{8+6}{6}$