תרגול 13

משפט (Cayley): מספר העצים על n קודקודים מתויגים $\{1,2,\ldots,n\}$ הוא n^{n-2}.

שאלה 1:
מהו מספר העצים על n קודקודים מתויגים $\{1,2,\ldots,n\}$ המכילים צלע $d=\{1,2\}$?

פתרון:
נסמן ב – X את כמות העצים שמכילים את הצלע הנתונה d. נשים לב כי כמות העצים שמכילים את הצלע d שווה לכמות העצים שמכילים צלע מסוימת אחרת e'.
נספור את כמות הזוגות הסדורים $<T,e>$ כאשר T הוא עץ פורש כלשהו על קבוצת הקודקודים הנתונה ו – e זו צלע שנמצאת בעץ.

נספור את כמות הזוגות בשתי דרכים:

- כמות הצלעות האפשרויות בגרף הם $\binom{n}{2}$. עבור כל אחת מהצלעות יש X עצים שבהם היא מוכלת, לכן כמות הזוגות הסדורים כמוגדר לעיל היא $X\binom{n}{2}$.
- כמות העצים האפשריים היא n^{n-2}, כל עץ משתתף ב - $n-1$ זוגות סדורים (עבור כל אחת מהצלעות שהוא מכיל), לכן קיבלנו $(n-1)n^{n-2}$ זוגות סדורים.

ז"א קיבלנו את השוויון $\binom{n}{2}\cdot X=(n-1)n^{n-2}$, ממנו ניתן לחשב $X=2n^{n-3}$.

הסתברות- מבוא:

הגדרות:

מרחב הסתברות בדיד:
קבוצה סופית Ω , כך שלכל אחד מאיבריה, $x\in\Omega$ מיוחס משקל אי שלילי $\Pr(x)\geq 0$ הנקרא ההסתברות של x, ומתקיים $\sum_{x\in\Omega}\Pr(x)=1$.
הקבוצה Ω מכונה מרחב המדגם, ויחד עם ההסתברויות הנלוות מסמנים- $(\Omega,\Pr)$.

מאורע:
יהי $(\Omega,\Pr)$ מרחב הסתברות בדיד, תת קבוצה $A\subseteq\Omega$ נקראת מאורע.
מאורע A הכולל בדיוק איבר אחד של Ω נקרא מאורע בסיסי.
הסתברות מאורע A מוגדרת ע"י הנוסחה: $\Pr(A)=\sum_{x\in A}\Pr(x)$.

מאורעות זרים:
יהי $(\Omega,\Pr)$ מרחב הסתברות בדיד, שני מאורעות $A,B\subseteq\Omega$ נקראים זרים אם $A\cap B=\emptyset$.

מאורע משלים:
יהי $(\Omega,\Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהי $A\subseteq\Omega$ מאורע,
המאורע המשלים של A הוא המאורע $\Omega\backslash A$ ומסומן ע"י $\bar{A}$. מתקיים כי $\Pr(\bar{A})=1-\Pr(A)$

התפלגות אחידה:
יהי $(\Omega,\Pr)$ מרחב הסתברות בדיד, אם כל ההסתברויות $\Pr(x)$ זהות, כלומר $Pr(x)=\frac{1}{|\Omega|}$ לכל $x\in\Omega$, אזי Pr היא התפלגות אחידה על המרחב Ω.

משפט: לכל שני מאורעות זרים A, B מתקיים כי $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.

משפט: יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד והיו $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ מאורעות זרים זה לזה אז $\Pr(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$.

משפט (חסם האיחוד – The union bound): יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהיו $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ מאורעות בו, אז $\Pr(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$.

משפט (עקרון ההכלה וההדחה למאורעות): יהי $(\Omega, \Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהיו $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ מאורעות בו, ההסתברות של מאורע האיחוד היא:

$$\Pr(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} Pr(\mathrm{A}_i) - \sum_{1 \leq i < j < n} \Pr(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j) + \cdots + (-1)^{n-1} \Pr(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \dots \cap \mathrm{A}_n)$$

<u>שאלה 2:</u>

נתונה קבוצה אקראית של n אנשים,

א. מהו ערכו המינימלי של n שעבורו בוודאות לשניים יהיה יום הולדת משותף?

ב. מה ההסתברות שלא יהיו שניים בעלי אותו יום הולדת?

<u>פתרון:</u>

א. לפי עקרון שובך היונים נדרשים 366 אנשים לשם כך.

ב. מרחב המדגם: $\{1,2, \dots, 365\}^n$

גודל מרחב המדגם: $|\Omega| = 365^n$

מספר האפשרויות בהן אין שניים עם יום הולדת זהה- $365 * 364 * \dots * (365 - n + 1)$

נחלק מספר זה בגודל מרחב המדגם ונקבל- $\frac{365*364*\dots*(365-n+1)}{365^n}$.

עבור $n \geq 23$ ישנה הסתברות של פחות מ0.5.

<u>שאלה 3:</u>

מטילים קובייה 100 פעמים.

א. מהו גודל מרחב המדגם?

ב. מהי ההסתברות שיצא בדיוק 70 פעם אותו ערך?

<u>פתרון:</u>

א. לכל הטלה 6 אפשרויות, סה"כ במרחב המדגם 6^{100} אפשרויות.

ב. $\frac{6 \cdot \binom{100}{70} \cdot 5^{30}}{6^{100}}$.

<u>שאלה 4:</u>

מטילים זוג קוביות מובחנות, E יוגדר להיות המאורע שבו סכום התוצאות בשתי הקוביות אי זוגי,

F יוגדר להיות המאורע שבו לפחות בקובייה אחת התקבלה התוצאה 6,

חשבו את הסתברות המאורעות הבאים:

א. $\mathrm{E} \cup F$.

ב. $\overline{(E \cup F)}$.

ג. $E \cup \bar{F}$.

ד. $\bar{E} \cup F$.

<u>פתרון:</u>

א. נדרש שבקובייה אחת יתקבל 6 או שהסכום של שתי הקוביות יהיה אי זוגי.

נספור כמה אפשרויות כאלה יש. יש 11 אפשרויות לכך שבאחת הקוביות לפחות התקבל 6.
אם באף קובייה לא התקבל 6 , לכל קובייה ישנן 5 אפשרויות- 3 אי זוגיות ו2 זוגיות.
כדי לקבל סכום אי זוגי רוצים שבאחת הקוביות יתקבל מספר זוגי ובשנייה אי זוגי.
סה"כ אפשרויות עבור האיחוד:

ולכן ההסתברות הינה $\frac{23}{36} = \frac{11+2*2*3}{6^2}$.

ב. ההסתברות למאורע המשלים של המאורע מסעיף א הינה- $\frac{13}{36} = \frac{6^2-23}{6^2}$.
ג. המשלים של F הינו המאורע שבו באף קובייה לא התקבל 6 ולכך יש 5^2 אפשרויות,
אם התקבל 6 באחת הקוביות, יש 3 אפשרויות עבור השנייה (ו-6 לא ביניהן), יש לכפול את התוצאה ב2 עבור התוצאה שבה 6 התקבל בקובייה השנייה.
סה"כ- $\frac{31}{36} = \frac{5^2+3*2}{6^2}$.
ד. שוב אפשרי שבקובייה אחת יתקבל 6 - 11 אפשרויות, ואם לא- הסכום צריך להיות זוגי.
ישנן שתי אופציות בהנחה שלא התקבל 6 באף אחת משתי הקוביות-
1. בשתיהן התקבל זוגי- 2*2 אפשרויות.
2. בשתיהן אי זוגי- 3*3 אפשרויות.
לכן ההסתברות לכך- $\frac{24}{36} = \frac{2*2+3*3+11}{6^2}$.

<u>שאלה 5:</u>
נתונה קובייה מוטה שבה ההסתברות לכך שהקובייה תראה מספר מסוים היא ביחס ישר לערך המספר.
למשל ההסתברות לקבל 6 גבוהה פי 2 מההסתברות לקבל 3.
א. מה ההסתברות לקבל 2?
ב. מה ההסתברות לקבלת תוצאה זוגית?

<u>פתרון:</u>
א. נסמן בx את ההסתברות לקבל 1, אזי ההסתברות ל2 הינה $2x$, ל3 הינה $3x$ וכך הלאה.
כיוון שסכום ההסתברויות האפשריות צריך להיות 1 נקבל ש- $\frac{(1+6)*6}{2}x = 1$ כלומר $x = \frac{1}{21}$ ולכן ההסתברות ל2 הינה $\frac{2}{21}$.
ב. ישנן 3 אפשרויות כאלה והן זרות זו לזו לכן סכום ההסתברויות עבורן ייתן את ההסתברות של המאורע המורכב משלושתן. סכום זה הינו- $\frac{12}{21} = 2x + 4x + 6x$.

<u>אי-תלות והסתברות מותנית:</u>

אי-תלות:
A, B נקראים מאורעות בלתי-תלויים (בת"ל) אם $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$.

<u>שאלה 6:</u>
מטילים שתי קוביות כחולה ואדומה. נסמן את תוצאת הכחולה ב – א' ותוצאת האדומה ב – ב'. מה ההסתברות ש:
א' אי-זוגית ו- ב' גדולה מ – 2?

<u>פתרון:</u>
נחשב: $|\Omega| = 36$, $\Pr(A) = \frac{3}{6}$, $Pr(B) = \frac{4}{6}$. לכן: $\Pr(A) \cdot \Pr(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$.

כעת בחישוב ישיר של החיתוך: $\Pr(A\cap B)=\frac{|\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}|}{|\Omega|}=$ $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

קיבלנו כי $\Pr(A\cap B)=\Pr(A)\cdot\Pr(B)$, כלומר A, B בת"ל.

נציין כי יכולנו מראש לדעת זאת ע"י הבנה אינטואיטיבית של המאורעות, והעובדה שהם בת"ל. לא תמיד זה יהיה ברור, ולפעמים אף האינטואיציה תשקר לנו, כך שעלינו להיזהר.

<u>שאלה 7:</u>

מטילים 3 קוביות מאוזנות א' ב' ו – ג', בנות 8 פאות כל אחת. ראשית מטילים את א' ואחר-כך את ב' ו – ג'. הקוביות מוטות כך שבכל הטלה תוצאות ב' ו – ג' שונות מתוצאת א'.

א. מה ההסתברות שתוצאת א' זוגית, וגם תוצאת ב' שווה לתוצאת ג' ?

ב. מה ההסתברות שתוצאת א' זוגית, וגם סכום תוצאות ב' ו – ג' שווה ל- 13 ?

<u>פתרון:</u>

א. נסמן: A = תוצאת א' זוגית. B = תוצאת ב' שווה לתוצאת ג'. כיוון שתוצאות ב' ו – ג' מושפעות מתוצאת א' אנו עלולים לחשוב ש –A, B תלויים, אך למעשה הם בת"ל, כיוון של - ב' ול – ג' יש את אותן 7 תוצאות אפשרויות (מרחב מדגם זהה) לאחר הטלת א', בלי קשר לתוצאת הטלת א'.

$\Pr(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\Pr(B)=\frac{7}{49}$. לכן $Pr(A\cap B)=\Pr(A)\cdot\Pr(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{49}=\frac{1}{14}$.

ב. נסמן: A = תוצאת א' זוגית. B = סכום תוצאות ב' ו – ג' שווה ל- 13. נפריד למאורעות זרים שאיחודם הוא $A\cap B$:

א' = 2 או 4. אז ל – ב', ג' האפשרויות הן: (5,8), (8,5), (6,7), (7,6). ההסתברות היא: $\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{49}=\frac{1}{49}$.

א' = 6. אז ל – ב', ג' האפשרויות הן: (5,8), (8,5). ההסתברות היא: $\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{49}=\frac{1}{196}$.

א' = 8. אז ל – ב', ג' האפשרויות הן: (6,7), (7,6). ההסתברות היא: $\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{49}=\frac{1}{196}$.

סה"כ ההסתברות למאורע $A\cap B$ שווה לסכום המאורעות הזרים הנ"ל, דהיינו: $\frac{1}{49}+2\cdot\frac{1}{196}=\frac{3}{98}$.

<u>הסתברות מותנית:</u>

הסתברות מותנה היא ההסתברות שמאורע Y כלשהו יקרה בהנחה שמאורע אחר X קורה. היא מסומנת ע"י $\Pr(Y|X)$ ומוגדרת ע"י $\Pr(Y|X)=\frac{\Pr(X\cap Y)}{\Pr(X)}$. היא מוגדרת רק אם $\Pr(X)\neq 0$.

<u>משפט</u>: יהי $(\Omega,\Pr)$ מרחב הסתברות בדיד ויהיו $X,Y\subseteq\Omega$ מאורעות בעלי הסתברות חיובית. אז התנאים הבאים שקולים:

א. X, Y בת"ל.

ב. $\Pr(Y|X)=\Pr(Y)$.

ג. $\Pr(X|Y)=\Pr(X)$.

<u>שאלה 8:</u>

מטילים שתי קוביות כחולה ואדומה. נתון שלפחות תוצאת אחת ההטלות היא זוגית. מה ההסתברות שתוצאת שתי ההטלות זוגית?

<u>פתרון:</u>

אנו עלולים לחשוב אינטואיטיבית כי ההסתברות היא $\frac{1}{2}$. נתון כי תוצאת אחת ההטלות היא זוגית, לשנייה יש הסתברות שווה להיות זוגית או אי זוגית, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{2}$.

נגדיר את הבעיה: מרחב המדגם הוא $\Omega=\{EE,EO,OE,OO\}$.

לדוגמא,EO,פירושו שהתוצאה הראשונה היא זוגית והשנייה היא אי זוגית.

ההסתברויות לכל אחד מהמאורעות הבסיסיים הן $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
נגדיר מאורעות: X = לפחות אחת תוצאות ההטלה היא זוגית, Y = שתי התוצאות זוגיות. אזי $X=\{EE,EO,OE\}$,
$Y=\{EE\}$. אנו מחפשים את ההסתברות ל Y– בתנאי X. נחשב: $\Pr(Y|X)=\frac{\Pr(Y\cap X)}{\Pr(X)}=\frac{\Pr(Y)}{\Pr(X)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$.

<u>שאלה 9:</u>
בסלסלה יש 2 תפוחים, 3 אגסים ו – 4 בננות (כל הפירות שונים אחד מהשני). משה וחנה משחקים משחק. כל אחד בתורו שולף שני פירות באקראי. מה ההסתברות שחנה תשלוף שני תפוחים בתור הראשון שלה, אם נתון שמשה היה ראשון והוא לא שלף בננות?

<u>פתרון:</u>
נסמן: A = חנה שלפה שני תפוחים.
B = משה לא שלף בננות.

אזי:
$\Pr(A\cap B)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}}$ – אם משה לא מוציא בננות וחנה מוציא תפוחים, אזי למשה יש אפשרות להוציא רק מתוך 3 האגסים השונים.
$\Pr(B)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}$ - אם משה לא הוציא בננות, אזי יש לו אפשרות בחירה רק מתוך 5 פירות שונים.

לכן: $\Pr(A|B)=\frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)}=\frac{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}}}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{2}}=\frac{1}{70}$.

<u>המשך הגדרות:</u>

משתנה מקרי ממשי: בהינתן (Ω,Pr) מרחב הסתברות בדיד, אזי f פונקציה ממשית $f:\Omega\to R$ נקראת משתנה מקרי ממשי על מרחב ההסתברות.

תוחלת: של משתנה מקרי ממשי f מסומנת בתור E(f) והיא הממוצע המשוקלל - $E[f]=\sum_{x\in\Omega}Pr(x)f(x)$.

ליניאריות התוחלת – יהי $(\Omega,\Pr)$ מרחב הסתברות בדיד, ו- $f_1,\dots,f_n$ משתנים מקריים ממשיים המוגדרים עבורו,
ו- $a_0,a_1,\dots,a_n$ קבועים, אזי $f=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_if_i$ הוא מ"מ ממשי, ו- $E(f)=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_iE(f_i)$.

אינדיקאטור (משתנה מקרי מציין) – משתנה מקרי ממשי f שהטווח שלו כולל רק את הערכים {0,1} ייקרא משתנה אינדיקאטור. משתנה אינדיקאטור למאורע A מקיים ש- E(f) = Pr(A).

- בהינתן (Ω,Pr) מרחב הסתברות בדיד, ו- f מ"מ שלו, $\Pr(f=a)=\sum_{\substack{x\in\Omega\\ f(x)=a}}\Pr(x)$
  - תוחלת של מ"מ ע"פ התפלגות הערכים שלו: $E(f)=\sum_{a\in R}a*\Pr(f=a)$
- f,g מ"מ על אותו מרחב הסתברות ייקראו **בלתי-תלויים** אם Pr(f=a,g=b)=Pr(f=a)Pr(g=b) לכל a,b.
  - עבור 2 מ"מ ב"ת, E(fg) = E(f)E(g).

<u>שאלה 10:</u>

1. מטילים קובייה הוגנת. מהו הערך הממוצע של ההטלה?
2. מטילים k קוביות הוגנות. מהו הערך הממוצע של סכום ההטלות?
3. מטילים k קוביות הוגנות. בכמה קוביות בממוצע ייצא מספר זוגי?

<u>פתרון:</u>

1. לקובייה הוגנת יש סיכוי של 1/6 לקבל כל תוצאה מבין הערכים 1-6. כלומר $\Omega = \{1,2,..,6\}$,

   $\Pr(x) = \frac{1}{6}$ לכל $x \in \Omega$, ו- $f(x)=x$. נחשב עתה תוחלת של הטלת הקובייה:

   $$E[f] = \frac{1}{6} * 1 + \frac{1}{6} * 2 + \frac{1}{6} * 3 + \frac{1}{6} * 4 + \frac{1}{6} * 5 + \frac{1}{6} * 6 = \frac{1}{6}\frac{(7*6)}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

2. תוחלת הסכום היא סכום התוחלות. חישבנו בסעיף א' שתוחלת הטלת קובייה היינה 3.5 , לכן תוחלת הטלת k קוביות הינה 3.5k. באופן פורמאלי, יכולנו להגדיר את $f_1,\ldots,f_k$ כמשתנים מקריים של הקוביות השונות. כל המשתנים מוגדרים עבור $(\Omega, \Pr)$, ומתקיים ש- $f_1(x)=f_2(x)=\ldots=f_k(x)=x$. לכן מליניאריות: $E[f] = \sum_{i=1}^{k} E[f_i] = E[f_1] + \cdots + E[f_k] = 3.5k$.

3. עבור כל קובייה i נגדיר את המאורע A_i בתור "יצאה תוצאה זוגית בקובייה ה- i". נגדיר לכל מאורע כזה משתנה אינדיקטור f_i. קל להיווכח ש- $pr(A_i)=1/2$ לכלו i (כיוון שההתפלגות על מרחב המדגם היא אחידה, ויש מספר שווה של תוצאות זוגיות ואי זוגיות), ועל כן $E(f_i)=1/2$. אנו מעוניינים למצוא את התוחלת של מספר התוצאות הזוגיות <u>בכל</u> ההטלות. תוחלת מספר התוצאות הזוגיות היא בדיוק סכום התוחלות של משתני האינדיקאטורים. מכאן נובע שמספר זה הוא k/2.