תרגול 11 – המשך גרפים מישוריים, מסלולי ומעגלי אוילר

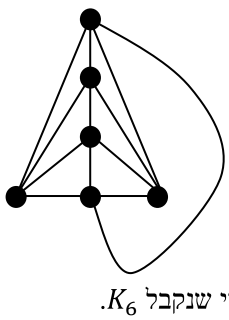
המשך גרפים מישוריים

1. תזכורת: **גרף דואלי** G^* של גרף מישורי G הוא הגרף שקדקודיו הם פאות G, ושני קדקודים שכנים ב - G^* אם"ם הפאות שהם מייצגים שכנות ב G –.
הוכחה נוספת לנוסחת אוילר (מתוך הספר *proofs from the book*):
יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי קשיר ויהי T עץ פורש של G.
יהי G^* הגרף הדואלי של G (ייתכן ש - G^* הוא מולטי גרף), ויהי T^* תת גרף של G^*, המכיל את צלעות G^* המחברות פאות המופרדות ע"י צלעות $E\backslash T$.
T עץ ולכן לא מכיל מעגלים, לכן T^* קשיר (אין ב - G שתי קבוצות פאות ש - T מפריד ביניהן). כמו כן, לא ייתכן ש - T^* מכיל מעגל, כי אז T לא קשיר או לא פורש (טיעון סימטרי). לכן T^* קשיר וחסר מעגלים, כלומר עץ פורש של G^*.
נסמן ב F – את פאות G. כעת: $|E(T)|=|V|-1$ וכן $|E(T^*)|=|V(G^*)|-1=|F|-1$, כיוון ש - G^* הוא הגרף הדואלי של G. נשים לב שכיוון שכל צלע ב - T^* מתאימה לצלע ב - $E\backslash T$, מתקיים ש - $|E|=|E(T^*)|+|E(T)|$. לכן נוכל לסכם ולקבל:
$|E|=(|V|-1)+(|F|-1)$, וע"י העברת אגפים נקבל את המשפט.

2. גרף נקרא $outerplanar$ אם הוא גרף מישורי וקיים ציור שלו במישור כך שכל הקדקודים נמצאים על השפה של הפאה החיצונית.
הוכיחו שאם הגרף הוא $outerplanar$, אזי הוא לא מכיל תת-גרף שהוא הומיאומורף של K_4 או תת-גרף שהוא הומיאומורף של $K_{2,3}$.
הוכחה
אם בשלילה הגרף מכיל הומיאומורף של K_4 או $K_{2,3}$, נוכל להוסיף קדקוד נוסף ולחבר אותו לכל קודקודי הגרף (שנמצאים על הפאה החיצונית) ולקבל ציור במישור של K_5 או $K_{3,3}$ בהתאמה, סתירה.

3. K_6 הוא כאמור הגרף המלא על 6 קדקודים.
   א. האם בהסרת 2 צלעות מ - K_6 נוכל לקבל גרף מישורי?
   ב. האם בהסרת 3 צלעות מ - K_6 נוכל לקבל גרף מישורי?

פתרון
   א. לא ניתן. אם נוריד 2 צלעות ששכנות לאותו קודקוד, אזי נשאר עם K_5 כתת – גרף. אם נוריד 2 צלעות שאינן חלות באותו הקודקוד, נסמן אותן $e_1=\{u,v\}$ ו - $e_2=\{x,y\}$, אזי נקבל כתת גרף את $K_{3,3}$ (כאשר u,v יחד עם קדקוד נוסף בצד אחד ו x,y – יחד עם הקדקוד שנותר בצד השני).
   דרך נוספת: כפי שראינו בכיתה, בגרף מישורי קשיר עם $n\ge 3$ קדקודים ו m – צלעות, מתקיים $m\le 3n-6$. ב K_6 – יש $\binom{6}{2}=15$ צלעות; אם נסיר שתי צלעות נישאר עם $m=13$, אבל $3n-6=18-6=12<13$ ולכן הגרף אינו מישורי.
   ב. ניתן.



נשים לב שחסרות לנו רק עוד 3 צלעות כדי שנקבל K_6.

<u>הגדרות</u>

- יהי $G=(V,E)$ גרף. צביעה חוקית של G ב – k צבעים היא פונקציה $c: V\to\{1,\dots,k\}$ כך שלכל $\{u,v\}\in E$ מתקיים $c(u)\neq c(v)$.
- אם קיימת צביעה חוקית של גרף G ב – k צבעים, G נקרא k-צביע.

4. יהי G גרף מישורי כך שכל צלע מפרידה בין שתי פאות. צ"ל ש - G^* 2-צביע $\Leftrightarrow$ כל קדקודי G הם מדרגה זוגית.

<u>הוכחה</u>

<u>$\Leftarrow$:</u> נניח G^* 2-צביע, ונניח בשלילה שקיים קדקוד $v\in V$ עם דרגה אי זוגית. אז סביב v יש מספר אי-זוגי של פאות שיוצרות מעגל אי-זוגי ב - G^*, ולכן לא ניתן לצבוע אותם בשני צבעים באופן חוקי.

<u>$\Rightarrow$:</u> נוכיח ש - G^* 2-צביע באינדוקציה שלמה על מספר הפאות $|F|$ ב - G.

בסיס: אין צלעות המוכלות בפאה, לכן אם $|F|=1$ אז G^* גרף עם קדקוד יחיד, אם $|F|=2$ אז G^* גרף בעל שני קדקודים, והטענה נכונה.

נניח נכונות עבור גרף בעל $|F|-1$ פאות, ונוכיח עבור גרף בעל $|F|$ פאות.

צעד: תהי f פאה כלשהי בגרף G. נוריד מ - G את כל צלעות התוחמות את הפאה, ונקבל את הגרף G'. ב - G' יש לכל היותר $|F|-1$ פאות, ודרגת כל קדקוד נשארה כמו שהייתה ב - G, או שירדה ב - 2 (ע"י הורדת 2 צלעות של שפת f), ולכן עדיין זוגית. לכן הנחת האינדוקציה מתקיימת, וניתן לצבוע את פאות G' ב - 2 צבעים. נתבונן בצביעה כזו. תהי f' הפאה ב - G' המכילה את f, ונניח שהיא צבועה אדום. אז כיוון ש - f מוכלת לגמרי ב - f', כל הפאות השכנות ל - f ב - G מוכלות ב - f' , ולכן כל הפאות הסמוכות ל - f צבועות באדום. נצבע את f בכחול וקיבלנו צביעה חוקית.

הוכחה נוספת לכיוון <u>$\Rightarrow$:</u> נגדיר מושג אורך פאה:

<u>הגדרה</u>: יהי G גרף מישורי ותהי F פאה ב G –. אורך הפאה F הוא אורך הטיול הקצר ביותר מסביב לפאה F (שמתחיל ומסתיים באותו קדקוד).

<u>הערה</u>: נשים לב שכל צלע שמוכלת (ויזואלית) בפאה נספרת <u>פעמיים</u> בחישוב אורך הפאה.

<u>טענת עזר</u>: גרף מישורי G הוא דו-חלקי אם"ם כל פאה בגרף באורך זוגי (הוכחה בדף התרגילים).

<u>$\Rightarrow$:</u> אנו מניחים שבגרף G כל הקדקודים הם מדרגה זוגית.

כל פאה בגרף G^* מייצגת קדקוד בגרף המקורי. אם בשלילה G^* מכיל פאה F^* עם אורך אי זוגי, אז F^* הינו קדקוד מדרגה אי זוגית ב G – וסתירה. לכן אורך כל פאה ב - G^* הוא זוגי; מטענת העזר G^* דו-חלקי ולכן 2-צביע (לכ"א מחלקי הגרף ניתן צבע שונה).

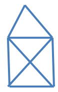
מסלולי ומעגלי אוילר

<u>הגדרות</u>

- ***מסלול אוילר*** הינו מסלול בגרף שעובר בכל צלע בדיוק פעם אחת.
- **מעגל אוילר** הוא מסלול אוילר שהינו מעגל.

<u>משפט</u>

א. גרף קשיר לא מכוון מכיל מעגל אוילר אם"ם דרגות כל קדקודיו זוגיות.
ב. גרף קשיר לא מכוון מכיל מסלול אוילר אם"ם דרגות כל קדקודיו זוגיות למעט אולי 2 קדקודים.
ג. גרף מכוון וקשיר (חזק) מכיל מעגל אוילר אם"ם דרגת הכניסה של כל קדקוד שווה לדרגת היציאה שלו.
ד. במקרה שבגרף 2 דרגות אי זוגיות והיתר זוגיות, מסלול אוילר מתחיל ומסתיים בקדקודים שדרגתם אי זוגית.

5. האם ניתן לצייר  מבלי להרים את העט מהנייר?

פתרון

נסתכל על הציור כגרף. בגרף 5 קדקודים עם הדרגות 2,3,3,4,4, כלומר דרגת כל הקדקודים למעט 2 זוגית.
לכן קיים מסלול אוילר בגרף (המסלול מתחיל מאחד הקדקודים בבסיס ומסתיים בשני).
מסלול זה ניתן לשרטוט מבלי להרים את העט.

6. באולימפיאדה מתמטית 20 שאלות ומשתתפים בה 20 תלמידים. ידוע שכל אחד מהתלמידים פתר 2 שאלות בדיוק, וכל אחת מהשאלות נפתרה על ידי שני תלמידים בדיוק. לאחר האולימפיאדה, קיבלו התלמידים משימה: להכין ספרון עם הפתרונות של כל תרגילי התחרות. הוכיחו שניתן לחלק את העבודה כך שכל תלמיד יכתוב פתרון לאחת מהשאלות שפתר בתחרות, וגם לכל שאלה ייכתב פתרון אחד בדיוק.

פתרון

נגדיר גרף דו חלקי בצורה הבאה: קדקודי הגרף יהיו התלמידים והבעיות, כאשר הקדקודים שמייצגים תלמידים יהיו בצבע כחול והקדקודים המייצגים בעיות יהיו בצבע אדום. שני קדקודים יהיו מחוברים ביניהם בצלע אם הם בצבעים שונים וגם הבעיה שמייצג הקדקוד הראשון נפתרה על ידי התלמיד שמייצג הקדקוד השני.
בגרף הזה הדרגה של כל אחד מהקדקודים היא 2, ולכן בכל רכיב קשירות קיים מעגל אוילר.
בכל רכיב קשירות, נתחיל ללכת במעגל אוילר מקדקוד כחול (תלמיד), ונבקש שכל תלמיד יכתוב את התשובה לשאלה אליה מוביל אותו המעגל. כך נקבל את החלוקה הנדרשת.

7. יהי G גרף בעל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר (לפחות רכיב קשירות אחד כזה). יש להוכיח שניתן להוסיף ל $G-$ קדקוד בודד ומספר צלעות מאותו קדקוד, ולקבל גרף חדש בו כל רכיב קשירות מכיל מעגל אוילר.

פתרון

ידוע שגרף מכיל מעגל אוילר אם"ם לכל קדקוד בו דרגה זוגית. לכן כל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר, מכיל קדקודים בעלי דרגה אי זוגית. מספרם של קדקודים אלה בכל רכיב קשירות זוגי, כי סכום דרגות הקדקודים בכל רכיב קשירות זוגי.
נוסיף ל $G-$ קדקוד s, ממנו נחבר צלעות לכל קדקוד בעל דרגה אי זוגית ב - G. בגרף שהתקבל, לכל קודקודי G דרגה זוגית בברור. בנוסף, מכך שבכל רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר מספר הקדקודים מדרגה אי זוגית הוא זוגי, הרי שגם $deg(s)$ זוגי. אם כן, לכל קודקודי הגרף שהתקבל דרגה זוגית, ולכן כל רכיב קשירות בגרף מכיל מעגל אוילר.

8. יש לבנות סדרה מעגלית של אפסים ואחדות באורך 2^n, כך שכל סדרה בינארית באורך n תופיע כתת סדרה של הסדרה המעגלית.

<u>הערה</u>: סדרה מעגלית כזו נקראת סדרת **דה-ברוין**.

<u>דוגמא</u>: המעגל עבור $n = 3$:

0

1 0

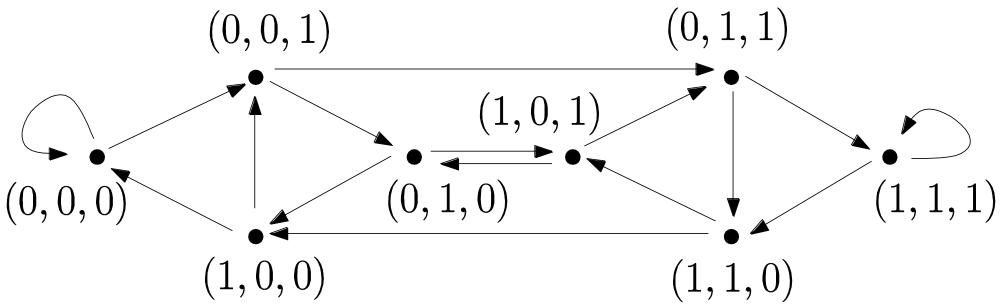
1 0

1 1

0

<u>פתרון</u>

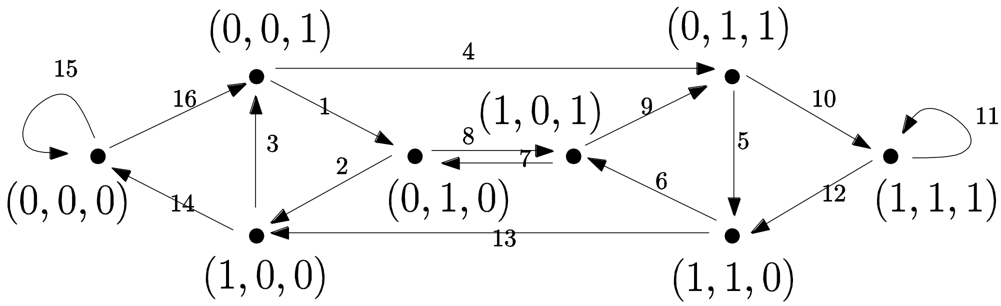
נגדיר גרף מכוון עם 2^{n-1} קדקודים, המייצגים את כל הסדרות הבינאריות באורך $n-1$. כעת לכל קדקוד $x=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ נוסיף צלעות מ - x לשני הקדקודים $(x_2,\dots,x_{n-1},0)$ ו - $(x_2,\dots,x_{n-1},1)$.
לדוג', עבור $n=4$:



הגרף קשיר חזק (יש <u>לבדוק</u>), ודרגות היציאה והכניסה של כל קדקוד הן 2, כלומר זהות. לכן קיים בגרף מעגל אוילר. נבנה את המעגל הדרוש מתוך מעגל האוילר:

נתחיל בקדקוד כלשהו (נניח ב - (0,0,...,0,0)), ונרשום במעגל את הספרה האחרונה בכל קדקוד אליו מגיעים, כלומר נעבור לקדקוד הבא במעגל אוילר הנתון - $(0,0,\dots,0,x_1)$ ($x_1 \in \{0,1\}$), נוסיף בהמשך קטע המעגל הקיים (שנבנה עד כה) את x_1, וכך הלאה.

לדוגמא, עבור המעגל:



נקבל את הסדרה: 1001101011110000.

נראה כעת שסדרה זו היא אכן סדרת דה-ברוין הרצויה.
ראשית נשים לב כי יש התאמה חח"ע ועל בין צלעות הגרף לבין הסדרות הבינאריות באורך n.
הסדרה $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ מותאמת לצלע המחברת את הקודקוד $(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ לקודקוד $(x_2,\dots,x_{n-1},x_n)$. מכיוון שמעגל אוילר מבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת, הסדרה שאנו בונים מבקרת בכל צלע, כלומר בכל סדרה באורך n, בדיוק פעם אחת.