תרגול 10: המשך עצים, גרפים דו חלקיים וגרפים מישוריים

1. תהי עיר א' כלשהי, ממנה ניתן לטייל לערים אחרות. נניח שמכל עיר (כולל א') ניתן להגיע באופן ישיר ל - 9 ערים אחרות בדיוק, ולא ניתן לחזור לערים שכבר ביקרנו בהן. עוד נניח שלא ניתן להגיע לעיר מסוימת ישירות משתי ערים שונות.
נגדיר שטיול חוקי הוא טיול המתחיל בעיר א' ועובר דרך 8 ערים בדיוק (כולל עיר המוצא).
א. לכמה ערים שונות ניתן להגיע בסוף טיול חוקי כלשהו?
ב. כמה ערים משתתפות בלפחות אחד מהטיולים החוקיים היוצאים מהעיר א'?

פתרון

נמיר את הבעיה למונחי עץ מכוון; נגדיר את שורש העץ להיות העיר א'. כל עיר שניתן להגיע אליה במהלך טיול חוקי תיוצג ע"י קדקוד, וצלע בגרף בין קדקודים המייצגים ערים ח' ו - ט' תייצג אפשרות לנסיעה ישירה מ - ח' ל - ט'. כך נגדיר עבור כל הערים שנמצאות במרחק 8 ערים ומטה מהעיר א'.
לא ניתן להגיע לאותה העיר ישירות משתי ערים שונות ולא ניתן לחזור לעיר, לכן הגרף שנוצר חסר מעגלים (גם מעגלים לא מכוונים).
ניתן להגיע מעיר א' לכל הערים שיוצגו על ידי קדקוד (לפי הגדרה), לכן הגרף שנוצר קשיר ולכן עץ.

א. בעץ האמור לכל צומת (מלבד העלים) 9 בנים, לכן מספר העלים בעץ הינו 9^7, וזה מספר הערים שניתן להגיע אליהן בסוף הטיול.
ב. כדי לקבל את מספר הצמתים בעץ, נסכם את מספר הצמתים בכל אחת מהרמות:

$$1+9+9^2+\cdots 9^7 = 1+\frac{9\cdot(9^7-1)}{9-1} = \frac{8+(9^8-9)}{8} = \frac{9^8-1}{8}$$

2. נתון גרף $G=(V,E)$ קשיר כך ש - $|V|>1$ ועבור כל צלע $e\in E$ הגרף $G'=(V,E\backslash\{e\})$ הוא עץ. יש להוכיח שכל קדקוד ב - G הוא בדרגה 2 (כלומר G מעגל).

פתרון

יהי $v\in V$ כלשהו. $d(v)>1$, אחרת אם נשמיט את הצלע שחלה ב - v נקבל גרף לא קשיר.
תהי $e=\{u,v\}$ צלע ב – G. מהנתון, אם נשמיט את e מ - G נקבל עץ. בעץ לפחות שני עלים, ודרגת כל עלה היא 1. הסרת הצלע הפחיתה רק מדרגות u,v, לכן v ו – u הם עלים בעץ G' (לכל יתר הקדקודים דרגה לפחות 2), כלומר דרגתם המקורית הייתה בדיוק 2. זה נכון לכל $u,v\in V$, לכן G מעגל כנדרש.

גרפים דו חלקיים

הגדרות

- גרף לא מכוון G נקרא **רגולרי** אם לכל הקדקודים בו יש את אותה הדרגה. אם לכל הקדקודים דרגה d, הגרף נקרא **d-רגולרי**.
- גרף $G=(V,E)$ ייקרא **דו-חלקי** אם ניתן לחלק את V לשתי קבוצות זרות $V=V_1\uplus V_2$, כך שכל צלע בגרף היא בין קדקוד מ – V_1 לקדקוד מ – V_2. לפעמים נסמן את הגרף הדו-חלקי ב – $G=(V_1\uplus V_2,E)$.

משפט: גרף הוא דו-חלקי אם ורק אם כל המעגלים שלו הם באורך זוגי.

3. גרף דו-חלקי מלא הינו גרף דו חלקי שבו ישנה צלע בין כל אחד מקדקודי V_1 לכל אחד מקדקודי V_2, ונהוג לסמנו - $K_{m,l}$ כאשר $|V_1|=m$, $|V_2|=l$.
א. הראו שלכל $l>0$, $K_{1,l}$ הינו עץ.
ב. הראו שלכל $m,l\geq 2$, $K_{m,l}$ אינו עץ.

פתרון

א. $K_{1,l}$ הינו גרף דו חלקי מלא כך שבצד אחד נמצא קדקוד יחיד ובצד שני כל היתר.

נסמן קדקוד זה ב - x, ואת יתר הקדקודים ב - y_j , $j \in \{1, \dots, l\}$. הגרף מלא, לכן יש צלע $\{x,\ y_j\}$, לכל $1 \le j \le l$, ולכן הגרף קשיר. בנוסף, לכל $1 \le i < j \le l$, $\{y_i,\ y_j\} \notin E$, לכן הגרף לא מכיל מעגלים, ולכן הינו עץ.

ב. נסמן שני הקדקודים שבאותו צד ב - $\{x_1,\ x_2\}$, ושניים שבצד השני ב - $\{y_1,\ y_2\}$ (ניתן לביצוע כי $m, l \ge 2$). הגרף מלא, לכן מכיל את המעגל $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_1)$, ולכן אינו עץ.

4. נתון גרף פשוט $G = (V, E)$ דו-חלקי, קשיר ו r – רגולרי. הוכיחו שעבור כל קודקוד $v \in V$, הגרף ללא הקודקוד v וכל הצלעות שחלות בו, עדיין קשיר.

פתרון

G גרף דו-חלקי, נסמן $V = A \cup B$ כאשר $A \cap B = \emptyset$ את צדדי הגרף. מכיוון ש G – רגולרי, מתקיים כי $|A| = |B|$.

נבחר $v \in V$ כלשהו ונתבונן בגרף G', שהוא הגרף המקורי G ללא v; נניח בשלילה ש G' – איננו קשיר ונניח בה"כ כי v נלקח מ A –. נסמן את צדדי G' ב – $A' = A \setminus \{v\}$ ו $B' = B$. אז ב A' – דרגת כל קודקוד היא r וב B' – דרגת r קודקודים היא $r - 1$ והשאר בדרגה r. יהי G_1 רכיב קשירות של G' שמכיל קודקוד מדרגה $r - 1$ ונסמן ב $A_1 \subseteq A'$ – וב $B_1 \subseteq B'$ – את הצדדים של G_1.

נסמן ב k – את מס' הקודקודים בדרגה $r - 1$ ב G_1 –, אז $|A_1| \cdot r = k \cdot (r-1) + (|B_1| - k) \cdot r$, ז"א $k \cdot (r - 1) = r(|A_1| - |B_1| + k)$, לכן r מחלק את $k \cdot (r - 1)$

(<u>הערה</u>: אם $|V| = 2$ הטענה טריוויאלית, אם $|V| > 2$ אז $r > 1$ כי G קשיר).

$r, r - 1$ זרים, לכן r מחלק את k, אך $k \le r$, לכן $k = 0$ או $k = r$.

לא ייתכן $k = 0$ כי הנחנו $k > 1$. בנוסף, אם $k = r$ אזי כל הצלעות שחלות ב v – יוצאות רק לקדקודי B_1.

מההנחה G' מכיל לפחות שני רכיבי קשירות; G קשיר, לכן בהכרח יש צלעות החלות ב v – ומחברות את רכיבי הקשירות של G', כלומר חלות בקדקודים $u \in B \backslash B_1$, וזו סתירה.

אם כן, בכל אחד מהמקרים קיבלנו סתירה, לכן G' קשיר.

5. יהיו A, B קבוצות קדקודים כך ש - $A \cap B = \emptyset$, $|A| = |B| = 3$. מהו מספר הגרפים הדו חלקיים עם חלוקת הקדקודים A, B שאינם מכילים רכיב קשירות בעל צלע בודדת?

פתרון

נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה.

בכל גרף העונה על ההגדרות יכולות להיות 9 צלעות וכל צלע יכולה להופיע או להיעדר, לכן סה"כ יש 2^9 גרפים.

לכל קדקוד $v_i \in A$, נסמן ב - A_i את קבוצת הגרפים בהם v_i שייך לרכיב קשירות בעל צלע בודדת (אם קיים רכיב כזה, חייב להשתתף בו קדקוד $v_i \in A$ כלשהו). לאחר בחירת הקדקוד $u_j \in B$ שישלים את רכיב הקשירות, יישאר לקבוע את מספר האפשרויות לגרף דו חלקי שבו שני קדקודים בכל חלק.

לכן לכל $1 \le i \le 3$ $|A_i| = 3 \cdot 2^4$: 3 אפשרויות לבחירת u_j ו - 2^4 אפשרויות ליתר צלעות הגרף.

בדומה, לכל $1 \le i < j \le 3$, $|A_i \cap A_j| = 3 \cdot 2 \cdot 2$: 3 אפשרויות לבחירת שכן לקדקוד הראשון, 2 לבחירת שכן לשני ו – 2 אפשרויות לזוג הנותר (עם או בלי צלע ביניהם).

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$ – מס' האפשרויות ליצירת 3 רכיבי הקשירות.

נסכם את מספר הגרפים האפשריים: $2^9 - 3 \cdot 3 \cdot 2^4 + \binom{3}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 - 3!$.

גרפים מישוריים

הגדרות

- גרף G נקרא **מישורי** אם ניתן לייצג אותו במישור מבלי ששום זוג צלעות יחתכו את אחת שניה.
- יהי G גרף מישורי. כל אזור החסום ע"י צלעות הגרף נקרא **פאה**. האזור שאינו חסום ע"י צלעות הגרף נקרא **הפאה החיצונית**, או **הפאה האינסופית** של G.
- **גרף דואלי** G^* של גרף מישורי G הוא הגרף שקדקודיו הם פאות G, ושני קדקודים שכנים ב - G^* אם"ם הפאות שהם מייצגים שכנות ב – G.

<u>דוגמא</u>: כיצד נראה הגרף הדואלי של עץ על n קדקודים?
קדקוד אחד עם $n-1$ צלעות עצמיות (לולאות).

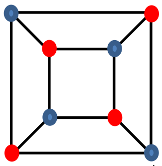
<u>נוסחת אוילר</u>: יהי G גרף מישורי קשיר, ונניח n מספר הקדקודים בגרף, m מספר הצלעות, ו - f מספר הפאות.
אז $n+f-m=2$.

<u>משפט (*Kuratowski*):</u> הגרף G אינו מישורי אם ורק אם הוא מכיל תת-גרף הומיאומורף של K_5 או תת-גרף הומיאומורף של $K_{3,3}$ (K_n הוא הגרף המלא על n קדקודים, הומיאומורף של גרף G הוא החלפה של כל צלע ב – G במסלול כלשהו, כאשר המסלולים זרים).

6. יהי G גרף דו-צדדי ומישורי, כך שלכל קדקוד דרגה $\le d$. מהם הערכים האפשריים עבור d?

<u>פתרון</u>

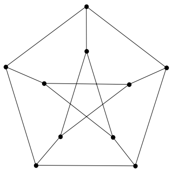
קל לראות כי d יכול להיות שווה 1 או 2. בשביל $d=3$ ניתן לקחת את גרף הקוביה Q_3:



נראה שלא ייתכן כי $d\ge 4$. נניח כי בשלילה כי קיים גרף כזה. דרגת כל קדקוד היא לפחות 4, לכן מתקיים $2|E|=\sum_{v\in V} d(v)\le 4|V|$, כלומר $2|V|\le|E|$.
עבור כל פאה f *נסמן ב* - *t(f)* את מספר הצלעות שמקיפות אותה. בגרף מישורי דו-חלקי, כל פאה תחומה ע"י 4 צלעות לפחות (לא ייתכנו מעגלים אי-זוגיים) וכל צלע חלה כאמור בשתי פאות לכל היותר (או פעמיים באותה פאה), לכן $4|F|\le\sum_{f\in F} t(f)=2|E|$, כלומר $2|F|\le|E|$. כעת, מנוסחת אוילר:
$|E|=\frac{|E|}{2}+\frac{|E|}{2}\ge|V|+|F|=|E|+2$, סתירה.

7. הוכח כי גרף פטרסון אינו מישורי (מופיע משמאל).

<u>הוכחה</u>



נניח בשלילה שגרף פטרסון מישורי. בגרף פטרסון $|V|=10, |\mathrm{E}|=15$.
מנוסחת אוילר $|V|-|E|+|F|=10-15+|F|=2$, כלומר $|F|=7$.
כל צלע חלה ב - 2 פאות (או פעמיים באותה פאה), לכן $\sum_{f\in F} t(f)=2|E|=30$.
מכיוון ש - $|F|=7$, מספר הצלעות שחלות בפאה הוא בממוצע $\frac{\sum_{f\in F} t(f)}{7}=\frac{30}{7}<5$, לכן בהכרח יש פאה שמוקפת ע"י 3 או 4 צלעות. אך בגרף פטרסון כל המעגלים הם באורך לפחות 5, סתירה.

8. נתון גרף $G=(V,E)$, $|V|=7$. הוכיחו ש - G או $\bar{G}$ הם גרפים מישוריים.

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה ששני הגרפים אינם מישוריים. ממשפט *Kuratowski* הם מכילים תתי-גרף הומיאומורפים של K_5 או $K_{3,3}$. נחלק ל- 3 מקרים:

א. G ו - $\bar{G}$ מכילים תתי גרף הומיאומורפים של K_5: במקרה כזה קיים $v\in V$ שהינו חלק מתתי הגרף ההומיאומורפים של K_5 בגרף וגם במשלים שלו, ולכן $d(v)$ לפחות 4 בשניהם. זה לא יתכן כי $|V|=7$.

ב. בה"כ G מכיל תת גרף הומיאומורף של K_5 ו - $\bar{G}$ מכיל תת גרף הומיאומורף של $K_{3,3}$: גם הפעם שניהם צריכים להכיל קדקוד משותף וסכום הדרגות שלו יהיה 7 (צריך להיות 6).

ג. G ו - $\bar{G}$ מכילים תתי גרף הומיאומורפים של $K_{3,3}$: ע"פ עקרון שובך היונים יש שני קדקודים שנמצאים באותו חלק של $K_{3,3}$ ב - G וב - $\bar{G}$. לכל אחד משני קדקודים אלה לפחות 3 שכנים "אחרים" בכל אחד מהגרפים, וכן באחד מהגרפים חייבת להיות ביניהם צלע ולכן דרגותיהם (בשני הגרפים) לפחות 7, סתירה.