תרגול 1 – תרגול חזרה

מושגים מתורת הקבוצות:

קבוצה היא אוסף של איברים שונים זה מזה. אין כל חשיבות לסדר האיברים בקבוצה.

שייכות לקבוצה: לכל עצם x ולכל קבוצה A בעולם, x שייך ל – A או x לא שייך ל – A.
סימון: $x \in A$ או $x \notin A$.

הגדרה: שתי קבוצות A ו – B תקראנה שוות אם ורק אם יש להן בדיוק את אותם האיברים.
סימון: $A = B$.
על מנת להוכיח שוויון של קבוצות עלינו להראות כי A מוכלת ב – B (נסמן $A \subseteq B$) **וגם** B מוכלת ב – A ($B \subseteq A$).
במילים אחרות, עלינו להראות כי עבור כל איבר x, אם $x \in A$ אזי $x \in B$ **וגם** אם $x \in B$ אזי $x \in A$.

קבוצות חשובות: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ וגם הקבוצה הריקה, שנסמן אותה ב - $\emptyset$.

קבוצת החזקה: נניח כי נתונה קבוצה A, נסמן את קבוצת החזקה של A כ – $P(A)$. קבוצת החזקה של A תכיל את כל התת קבוצות של A, ז"א $P(A) = \{A' | A' \subset A\}$.

פעולות על קבוצות: בהינתן שתי קבוצות A ו – B:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ וגם } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ או } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ וגם } x \notin B\}$$

זוגות סדורים ומכפלה קרטזית:

זוג סדור זו רשימה (a, b) של שני איברים כשהסדר חשוב (בשונה מקבוצות).

המכפלה הקרטזית של שתי קבוצות A ו – B היא הקבוצה של כל הזוגות הסדורים של איבר מ – A ואיבר מ – B:
$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.
המכפלה הקרטזית של n קבוצות $A_1, A_2, \dots, A_n$ היא הקבוצה:
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$.

יחסים:

יחס הוא קבוצה שכל איבריה הם זוגות סדורים.
בהינתן קבוצות A ו – B, תת-קבוצה $R \subset A \times B$ נקראת יחס מ – A ל – B.

נתבונן ביחס $R \subseteq A \times A$:

R רפליקסיבי על A אם לכל $a \in A$, מתקיים כי $(a, a) \in R$.

R סמטרי אם לכל $a, b \in A$, אם $(a, b) \in R$ אזי $(b, a) \in R$.

R טרנזיטיבי אם לכל $a, b, c \in A$, אם $(a, b) \in R$ וגם $(b, c) \in R$ אזי $(a, c) \in R$.

נאמר כי R הוא יחס שקילות אם R הוא רפלקסיבי, סמטרי וטרנזיטיבי.

עבור $a \in A$, מחלקת השקילות של a ב- R היא קבוצת כל איברי A שעומדים ביחס R עם a:

$$[a]_R = {}^{a}/_{R} = \{b \in A | (a, b) \in R\}$$

קבוצת המנה הינה קבוצת מחלקות השקילות ביחס ל – R:

$$^{A}/_{R} = \{^{a}/_{R} | a \in A\}$$

קבוצת המנה היא חלוקה של A. כלומר מתקיים כי:

- $\emptyset \notin {}^{A}/_{R}$
- מחלקות השקילות השונות הן זרות.
- איחוד כל המחלקות השקילות הוא A.

טענה: ישנה התאמה חח"ע ועל בין חלוקות של A ויחסי השקילות על A.

R הוא <u>אנטי-סמטרי</u> אם לכל $a, b \in A$ אם $(a, b) \in R$ וגם $(b, a) \in R$ אזי $a = b$.

נאמר כי R הוא <u>יחס סדר חלקי</u> אם הוא רפלקסיבי, אנטי-סמטרי וטרנזיטיבי.

פונקציות:

תהיינה A, B שתי קבוצות. יחס $f \subseteq A \times B$ נקרא <u>פונקציה</u> מ – A ל – B, אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ אחד ויחיד כך ש – $(a, b) \in f$.

$f: A \to A$ נקראת <u>תמורה</u> אם f היא חח"ע ועל.

דוגמה:

תהי $f: A \to B$ פונקציה. נגדיר $range(f) = \{b | (a, b) \in f, a \in A\}$.

תהיינה A, B קבוצות ויהי F אוסף כל הפונקציות מהקבוצה A לקבוצה B (נסמן $F = B^A$). נגדיר יחס R כך ששתי פונקציות $f, g \in F$ מקיימות $(f, g) \in R$ אם ורק אם $range(f) = range(g)$.

הראו כי היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

אינדוקציה:

<u>אינדוקציה רגילה</u>:

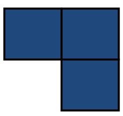
- מוכיחים את הטענה עבור הבסיס.
- הנחת האינדוקציה: מניחים שהטענה נכונה עבור $n \in \mathbb{N}$.
- צעד: מוכיחים את הטענה עבור $n + 1$, בהסתמך על ההנחה.

<u>אינדוקציה שלמה</u>:

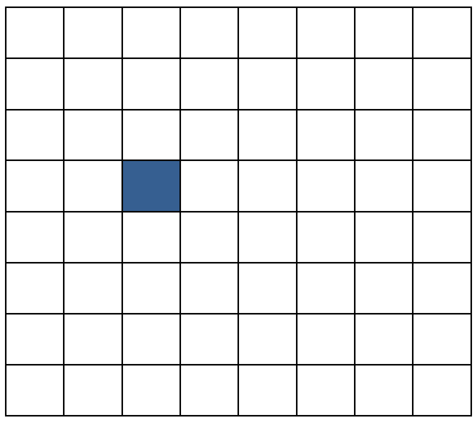
- (מוכיחים את טענה עבור הבסיס).
- הנחת האינדוקציה: מניחים שהטענה נכונה **לכל** מספר **קטן ממש** מ – n.
- צעד: מוכיחים את הטענה עבור n, בהסתמך על ההנחה.

תרגיל 1:

נתון לוח משבצות בגודל $m \times m$. משבצת אחת בלוח צבועה בשחור. בנוסף יש מרצפה מיוחדת שנראת כמו לוח 2×2 שפינתה האחת חסרה כבתרשים להלן. עלינו לכסות את הלוח כולו (פרט למשבצת השחורה) בעזרת המרצפות המיוחדות, כאשר אפשר לשים את המיוחדות בכל כיוון רצוי.



המרצפה המיוחדת

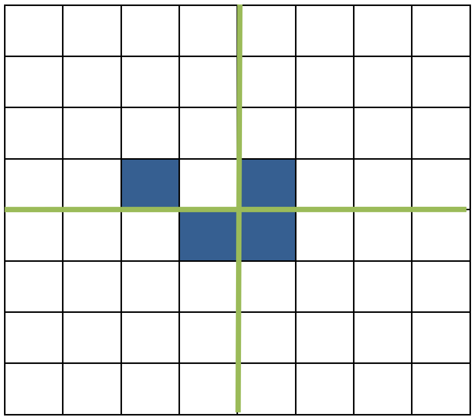


הלוח

הראו כי לבעיה לעיל על לוח $m \times m$ יש פתרון לכל m שהוא חזקה של 2.

פתרון:

מכיוון ש – m הוא חזקה של 2, אפשר להניח ש – $m = 2^n$.
נוכיח את הטענה באינדוקציה על n, כאשר $m = 2^n$.
בסיס: $n = 0$. במקרה זה $m = 2^0 = 1$, כלומר מדובר בלוח 1×1 או במילים אחרות במשבצת אחת. לכן בהכרח המשבצת הזו היא המשבצת השחורה ולכן כבר מכוסה.
צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $n - 1$, ז"א לוחות בגודל 2^{n-1} ניתן לכסות ע"י המרצפות המיוחדות.
נתבונן בלוח $2^n \times 2^n$ ונחלק אותו ל – 4 לוחות שווים, כ"א בגודל $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. המשבצת השחורה נמצאת באחד מארבעת הלוחות הללו. ניקח מרצפה מיוחדת אחת ונמקם אותה במרכז הלוח, כאשר פינתה החסרה נמצאת בלוח שמכיל את המשבצת השחורה. כעת קיבלנו את ארבעת הלוחות, כאשר בכ"א מהם חסרה משבצת ואותם ניתן לכסות עפ"י הנחת האינדוקציה ולכן ניתן גם לכסות את כל הלוח.



תרגיל 2:

הראו כי כל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים.

פתרון:

נוכיח את הטענה באינדוקציה שלמה על n.
בסיס: $n = 2$, 2 הוא ראשוני, לכן ניתן לרשום אותו כמכפלה של מספרים ראשוניים.
צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור כל $m < n$ ונוכיח עבור n.
אם n ראשוני – סיימנו.
אחרת, קיימים שני מספרים $s, t \in \mathbb{N}$ כך ש – $n = s \cdot t$ ו – $1 < s, t < n$. אולם אז לפי הנחת האינדוקציה, ל – s ול – t יש פירוק לגורמים ראשוניים, ולכן גם ל – n יש פירוק לגורמים ראשוניים.

תרגיל 3:

הוכיחו שכל הסוסים הם באותו הצבע.

פתרון:

נוכיח באינדוקציה על N כמות הסוסים בעולם.
בסיס: $n = 1$. סוס בודד הוא תמיד בצבע אחד.
צעד האינדוקציה: נניח שכל קבוצת סוסים שגודלה קטן ממש מ - n היא באותו צבע.
נוכיח את הטענה לקבוצה בגודל n. נחלק את הקבוצה ל - 2 קבוצות הקטנות ממש מ – n וע"פ הנחת האינדוקציה בשניהם לכל הסוסים יש אותו צבע. כעת נחליף סוס מכל קבוצה ועדיין כל הסוסים בשני הקבוצות יהיו באותו צבע. לכן שני הקבוצות היו באותו הצבע. לכן כל הסוסים הם באותו הצבע.

היכן הטעות?: הכישלון הוא במעבר מ- $n = 1$ ל- $n = 2$ ההנחה שהתכונה מתקיימת עבור $n = 1$ אינה גוררת שהטענה תתקיים עבור $n = 2$.

תרגיל 4:

נתון הקוד הבא שסופר את כמות הקודקודים בעץ בינארי:

```
countNodes (Node n){
    if (n is null)
        return 0
    return 1 + countNodes( n.getLeftSon()) + countNodes( n.getRightSon())
}
```

קוראים לפונקציה לעיל עם שורש העץ. הוכיחו שהקוד מבצע את הדרוש.

פתרון:

נשתמש באינדוקציה שלמה על גודל העץ.

<u>בסיס</u>: נשתמש בעץ ריק. האלגוריתם יחזיר אפס היות ותנאי העצירה יתקיים בעצירה הראשונה.

<u>צעד</u>: נניח שהאלגוריתם נכון עבור כל עץ עם מספר קודקודים שקטן מ n.

עבור עץ בגודל n ידוע שתתי העץ הימניים והשמאליים גודלם קטן ממש מ - n. לכן נריץ את האלגוריתם על עץ בגודל n וע"פ הנחת האינדוקציה countNodes(n.getLeftSon()) ו countNodes(n.getRightSon()) יחזירו תוצאות נכונות אם נחבר לשניהם 1 (עבור האיבר הראשון בעץ, השורש) נקבל n כדרוש.